МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Вычислительная математика»

Г.В. ЧЕРНИКОВ

М.У.
№2348
03-13759
Черников Г.В. уч
Аналитическая геометрия
Г05

УТВЕРЖДЕНО
редакционно-издательским
советом университета

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВЕЧЕРНЕГО ФАКУЛЬТЕТА

Москва – 2005

УЧЕБНАЯ
БИБЛИОТЕКА
МИИТ з

УДК 517.77
Ч 49

Черников Г.В. Аналитическая геометрия. Методические указания к практическим занятиям по математике для студентов вечернего факультета. – М.: МИИТ, 2005. – 28 с.

Рассмотрены базовые понятия аналитической геометрии. В каждом разделе представлен необходимый теоретический материал и решено несколько типовых задач так, чтобы студент, имея образец решения мог самостоятельно решать предлагаемые в курсе задачи.

© Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), 2005

Введение.

Методические указания предназначены для студентов, изучающих высшую математику на 1-ом семестре 1-го курса и соответствуют программе по математике для студентов вечернего факультета. Рассмотрены базовые понятия аналитической геометрии: координатная система, точка, вектор, плоскость и прямая в пространстве. Основной упор делается на выработку у студента навыков решения практических задач. В каждом разделе дана сводка основных правил и решено несколько задач так, чтобы студент, усвоивший теоретический материал и имея образец, мог самостоятельно решать предлагаемые в курсе типовые задачи.

Для удобства работы с методическими указаниями определения основных понятий даются *курсивом*, а требующие особое внимание моменты выделены <u>подчекиванием</u> или **жирным** шрифтом.

Матрицы.

– это *прямоугольные таблицы чисел* записанные в <u>круглых</u> скобках. Сейчас нас будут интересовать только *квадратные матрицы* – т.е. такие, у которых <u>число строк равно числу столбцов</u>.

Пример 1.

(а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ - матрица размера 2x2; (б) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица размера 3x3;

(в) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{n-\text{столбцов}}$ - матрица размера *n* x *n*.

Внутри матрицы стоят ее *элементы* – это <u>числа</u>, даже тогда, когда они обозначены буквами с *индексами* – как примере 1(б).

Вопрос: сообразите, сколько *нулевых* элементов у матрицы в примере 1(в)?

В матрице каждый элемент четко стоит в своей строке и столбце и произвольно менять местами элементы нельзя. При буквенной записи элементов, как в примере 1(б), индексы как раз и говорят – в какой строке и каком столбце находится данный элемент, причем *первый индекс* всегда указывает <u>номер строки</u>, а *второй* – <u>номер столбца</u>.

Матрицы широко используются в математике. Над ними можно делать различные операции (и мы с ними познакомимся в дальнейшем), однако сейчас для нас важна лишь одна: вычисление определителя матрицы.

ОПРЕДИЛИТЕЛИ.

У любой <u>квадратной</u> матрицы можно вычислить *определитель*.

Определитель – это число, и для его вычисления матрицу сначала записывают в <u>прямых</u> скобках, а затем по специальным правилам эти скобки раскрывают. Например, для 2x2 –марицы из примера 1(а) определитель второго порядка запишется так:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 - 3\cdot 0 = -2.$$

Как мы его вычислили? Перемножили крест-накрест элементы и вычли одно произведение из другого. Схематично это выглядит так:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & \quad - \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 - 3\cdot 0 = -2. \end{array}$$

Аналогичную схему можно построить для определителя 3-го порядка (для удобства справа мы приписали 1-й и 2-й столбцы, а затем «тройки» элементов сложили или вычли в соответствии с указанным в кружочке знаком):

$$
\begin{array}{ccc|cc}
+ & + & + \; - & - & - \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}
$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Замечание: вычислять определители порядка 4 и старше по подобным схемам нельзя!

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (КРАТКО: СЛАУ)

Систему 2-го порядка с двумя неизвестными x и y можно записать так:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

(Понятно, что в реальной системе никаких букв a_{ij} и b_i не будет, а будут обычные числа).

Важно, чтобы в записи системы все неизвестные x стояли в первой колонке, y – во второй, и т.д, а свободные члены находились справа от знаков равенства.

Решим эту систему (т.е. найдем два числа x и y, которые обращают обе строки системы в тождество) *с помощью определителей*[1]. Для этого проделаем следующие шаги:

1) запишем систему в матричном виде:

---

[1] Хотя это можно сделать и «по-школьному»: выразить из 1-ой строки , например, x , а затем, полученное выражение подставить во 2-ю строку и найти y; найденный y подставить в 1-ю строку и получить x.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$ и вычислим определитель *основой матрицы* системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3) Если $\Delta \neq 0$, то вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

Отметим, что определитель Δ_1 получается, если в записи определителя Δ вместо 1-го столбца подставить столбец правых частей B, а Δ_2 – если вместо 2-го столбца,– столбец B.

4) Найдя Δ, Δ_1 и Δ_2 , можно записать ответ: $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Замечание: Если окажется, что $\Delta = 0$, то вычислить x и y нельзя (т.к. нельзя делить на 0). Однако, это не означает, что система не имеет решений – просто решать ее надо каким-нибудь другим способом.

Для систем 3-го порядка поступаем точно так же, с той лишь разницей, что придется вычислять еще и Δ_3 . Подробнее рассмотрим на примере.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} y - z + 2x = 3 \\ x + z = -4 \\ 3x = 4y - 2z \end{cases}$$

Перепишем систему так, чтобы x стояли в первой колонке, y – во второй, z – в третьей, а справа оказались свободные члены:

$$\begin{cases} 2x + \ y - \ z = 3 \\ x + \ 0y + \ z = -4. \\ 3x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Теперь запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$=2\cdot0\cdot2 + 1\cdot1\cdot3 + (-1)\cdot1\cdot(-4) - (-1)\cdot0\cdot3 - 1\cdot1\cdot2 - 2\cdot1\cdot(-4) = 13$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = 4; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = -25;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = -56.$$

(Самостоятельно проделайте вычисления определителей Δ_1, Δ_2 и Δ_3 и убедитесь, что они действительно равны указанным значениям)

Окончательно получим: $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} =$ 4/13, $\quad y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} =$ -25/13,

$z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} =$ -56/13.

Разложение векторов.

Если в 3-х мерном пространстве выбрать *три не лежащих в одной плоскости вектора*:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ (такие векторы называются *некомпланарными*[2]), то любой другой вектор

$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ можно разложить по этим трем векторам. Разложить – это значит найти три числа x, y и z (они называются *коэффициентами разложения*) – такие, что выполняется равенство:

$$\vec{p} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} \qquad (1)$$

Аналитически эта задача сводится к решению системы из трех уравнений для неизвестных x, y и z. Чтобы получить эту систему, перепишем (1), только теперь вместо векторов подставим их координаты, записанные в виде столбцов; получим:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$ или, что то же самое:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1x = p_1 \\ a_2x + b_2x + c_2x = p_2 \\ a_3x + b_3x + c_3x = p_3 \end{cases}.$$

Решив последнюю систему, мы найдем неизвестные *коэффициенты разложения.*

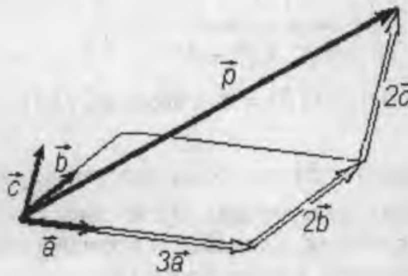
Замечание: решая систему с помощью определителей, нам придется вычислять $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; обратите внимание, его столбцы – это

---

[2] Наоборот, *три вектора, лежащих в одной плоскости,* называют *компланарными.*

координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Если окажется, что Δ=0, то *векторы* $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ *– компланарны,* и значит разложить произвольный вектор $\vec{p}$ по ним нельзя.

Графическое разложение вектора $\vec{p} = (3, 5, 2)$ по векторам $\vec{a} = (1, 1, 0), \vec{b} = (-2, 1, -1)$ и $\vec{c} = (2, 0, 2)$ проиллюстрировано на рисунке.



$\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ.

При отыскании угла φ между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вначале обычно находят $\cos(\varphi)$. Если векторы заданы своими координатами: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то формула для $\cos(\varphi)$ имеет такой вид:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Зная косинус угла, можно найти и сам угол (конечно, с точностью до знака).

Пример 3. Найти угол между векторами $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, если $A(2, -1, 3), B(3, 1, 1)$ и $C(2, 2, 7)$.

Векторы заданы точками своего начала и конца; вычитая из координат конца координаты начала, получим координаты векторов:

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(3-2,\,1-(-1),\,1-3)=(1,\,2,\,-2),$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(2-2,\,2-(-1),\,7-3)=(0,\,3,\,4)$$

Подставляя координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в формулу для $\cos\varphi$, найдем:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 0+2\cdot 3+(-2)\cdot 4}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\,\sqrt{(0)^2+3^2+4^2}}=-\frac{2}{15}.$$

Поэтому: $\varphi=\arccos(-2/15)=\pi-\arccos(2/15)$.

Может оказаться $\cos\varphi=\pm 1$, что соответствует углу между векторами 0^0 или 180^0. В этом случае говорят, что векторы *коллинеарны* (т.е. *лежат на параллельных прямых*). Однако, для проверки коллинеарности $\cos\varphi$ лучше не вычислять, а воспользоваться таким свойством: *координаты векторов должны быть пропорциональны*, т.е.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

Например, векторы $\vec{a}=(6,-9,\,3)$, $\vec{b}=(-2,\,3,-1)$ коллинеарные.

Действительно, $\dfrac{6}{-2}=\dfrac{-9}{3}=\dfrac{3}{-1}=-3$.

Если требуется определить *ортогональность векторов* (т.е. проверить, *расположены ли они под углом 90^0 друг к другу*), то достаточно вычислить их *скалярное произведение*[3]:

$$(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \qquad (2)$$

если оно равно 0, то векторы ортогональны.

---

[3] Воспользовашись (2), легко получить *основные свойства скалярного произведения*: 1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$, 2) $(\vec{a},\vec{b}+c)=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{a},\vec{c})$, 3) $(\alpha\,\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\alpha\,\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$.

Замечание: с учетом **(2)**, формулу для $\cos(\varphi)$ компактно можно записать так:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Обратите внимание, что если вектор скалярно умножить на себя же, то получится квадрат его длины $|\vec{a}|^2$:

$$(\vec{a},\vec{a}) = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$$

Замечание: из последней записи следует, что <u>всегда</u> $(\vec{a},\vec{a}) \geq 0$, причем, $(\vec{a},\vec{a}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} = (0,0,0)$.

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

Три основных <u>отличия векторного произведения от скалярного</u> заключаются в следующем:

(1) векторное произведение обозначается знаком «×» (скалярное ·)

(2) <u>результат векторного произведения всегда вектор</u> (результатом скалярного произведения всегда будет число);

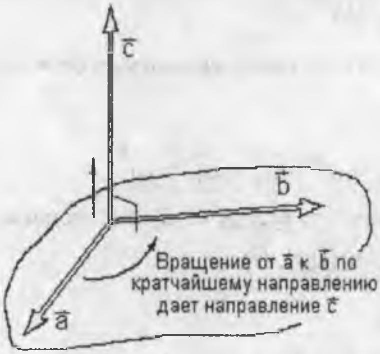
(3) если в векторном произведении векторы поменять местами, то <u>результат изменит знак на противоположный</u>: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (напомним, что в скалярном произведении: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$).

Пусть векторы заданы своими координатами: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Тогда, векторное произведение векторов запишется в виде определителя:

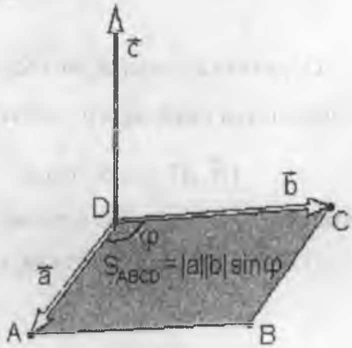
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(a_2b_3 - a_3b_2) + \vec{j}\,(a_3b_1 - a_1b_3) + \vec{k}\,(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Важно: полученный вектор, обозначим его $\vec{c}$, будет ортогонален плоскости, в которой лежат $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем все три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют *правую тройку векторов*[4] (см. рисунок (а)).



а)



б)

Длина $\vec{c}$ вычисляется по формуле: $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Замечание: Численно, длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см рис. б)):

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi = S_{ABCD}$$

Пример 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен 60^0.

---

[4] Если головку «правого» винта вращать по кратчайшему направлению от вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$, то поступательное движение винта укажет направление третьего вектора $\vec{c}$ (см. выше – рисунок а)).

Вычислим векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{p}-\vec{q})\times(2\vec{p}+3\vec{q})=\vec{p}\times 2\vec{p}+\vec{p}\times 3\vec{q}-\vec{q}\times 2\vec{p}-\vec{q}\times 3\vec{q}=$$
$$2\ \vec{p}\times\vec{p}+3\ \vec{p}\times\vec{q}-2\ \vec{q}\times\vec{p}-3\vec{q}\times\vec{q}.$$

Замечание: Легко сообразить, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (и следовательно, $\sin\varphi=0$), то $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{\theta}$ [5]. По этой же причине векторное произведение любого вектора на себя равно $\vec{\theta}$.

С учетом последнего замечания, получим:

$$\vec{a}\times\vec{b}=3\ \vec{p}\times\vec{q}-2\ \vec{q}\times\vec{p}=3\ \vec{p}\times\vec{q}+2\ \vec{p}\times\vec{q}=5\ \vec{p}\times\vec{q}.$$

Следовательно: $S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=$

$$5\left|\vec{p}\times\vec{q}\right|=5\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cdot\sin(60^0)=5\cdot 2\cdot 3\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}.$$

Пример 5. Проверить, являются ли векторы $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}$ коллинеарными, если $\vec{a}=(-2,\ 6,4)$ и $\vec{b}=(5,-15,\ -10)$.

Найдем векторное произведение:

$$\vec{p}\times\vec{q}=(2\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}=$$
$$=\vec{\theta}+2\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{\theta}=3\vec{a}\times\vec{b}=$$
$$=3\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \vec{k}\\ -2 & 6 & 4\\ 5 & -15 & -10\end{vmatrix}=3(0\bar{i}+0\bar{j}+0\vec{k})=(0,0,0)=\vec{\theta}.$$

В результате получили нулевой вектор, следовательно, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – коллинеарны.

---

[5] $\vec{\theta}=(0,\ 0,\ 0)$ - нулевой вектор.

Смешанное произведение векторов.

Обозначение *смешанного произведения (трех) векторов*: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$. Результат смешанного произведение – число (которое может быть положительным, отрицательным или нулем). Это число легко вычислить, если известны координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Итак, пусть $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ и $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$. Тогда:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2- \tag{3}$$

$$-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$$

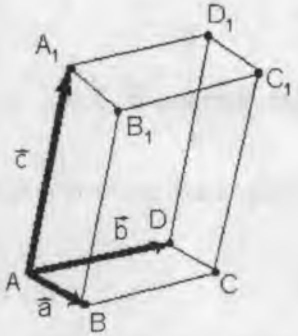
Формулу (3) можно получить, если $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ рассматривать как $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ (или $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$). Действительно, умножив скалярно вектор $\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$ на $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ получим тот же рузультат.

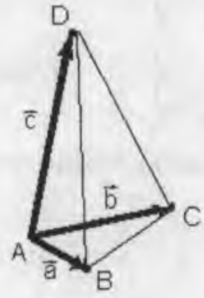
Замечание: если три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку (в том порядке как они записаны), то $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}>0$; наоборот, для левой тройки: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}<0$.

Смешанное произведение векторов можно использовать для вычисления построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ объема параллелепипеда:

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|$ или объема тетраэдра: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|$

Модуль в этих формулах присутствует потому, что значение произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ может оказаться отрицательным, а объем отрицательным быть не может (см. рисунок ниже).





Пример 6. Вычислить объем тетраэдра с вершинами $A(-1,\ 0,\ 2)$, $B(-1,\ 1,\ 3)$, $C(2,\ 0,\ 2)$ и $D(3,\ -1,\ 2)$ и его высоту, опущенную из вершины D на грань ABC.

Сначала получим векторы соответствующие ребрам тетраэдра: $\vec{a} = \overline{A}\vec{B} = (0,\ 1,\ 1)$, $\vec{b} = \overline{A}\vec{C} = (3,\ 0,\ 0)$ и $\vec{c} = \overline{A}\vec{D} = (4,\ -1,\ 0)$.

Вычислим смешанное произведение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

. Окончательно получим,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|\,\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\,| = \frac{1}{2}.$$

Если окажется, что $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$, то векторы $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ лежат в одной плоскости (т.е. *компланарны*). Поэтому, смешанное произведение векторов также используют с целью проверки, являются ли три заданных вектора компланарными, или нет.

Пример 7. Компланарны ли векторы $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b} = (4,\ 5,\ 6)$ и $\vec{c} = (7,\ 8,\ 9)$?

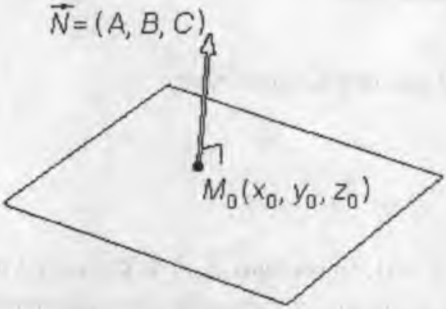
Вычислим их смешанное произведение:

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\ldots=0$. Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны. (**Задание**: вычислите этот определитель самостоятельно.)

Плоскость.

Чтобы получить уравнение плоскости нужно знать какую-нибудь точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ через которую плоскость проходит и вектор $\vec{N}=(A,B,C)$, который перпендикулярен плоскости (этот вектор называют *нормалью к плоскости*), см. рисунок ниже. В этом случае уравнение плоскости запишется так:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$



Пример 8. Плоскость, проходящая через $M_0(1,-3,\ 2)$ и перпендикулярная вектору $\vec{N}=(-2,\ 6,\ 5)$, имеет такое уравнение:
$-2(x-1)+6(y+3)+5(z-2)=0$.

Раскрывая скобки и домножая обе части уравнения на -1, получим *каноническое уравнение плоскости*: $2x-6y-5z+10=0$.

Общий вид *канонического уравнения плоскости* в 3-х мерной декартовой системе координат такой:

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0\,.$$

Из него сразу можно получить *вектор нормали* $\bar{N}$; его образуют числа A, B, C : $\bar{N} = (A, B, C)$.

Чтобы найти какую-нибудь точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на этой плоскости, нужно любые две координаты этой точки (например x_1 и y_1) задать самому, а третью (z_1) выбрать так, чтобы удовлетворялось уравнение: $A\,x_1 + B\,y_1 + C\,z_1 + D = 0$. Так для плоскости $-2\,x + 6\,y + 5\,z - 10 = 0$, полагая, например, $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$, получим $z_1 = 2$, т.е. $M_1(0,\ 0,\ 2)$.

Из школьного курса геометрии известно, что плоскость однозначно определяется по трем точкам:

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2) \text{ и } M_3(x_3, y_3, z_3)$$

не лежащим на одной прямой. Уравнение такой плоскости получится, если координаты точек подставить в определитель, раскрыть его и приравнять 0:

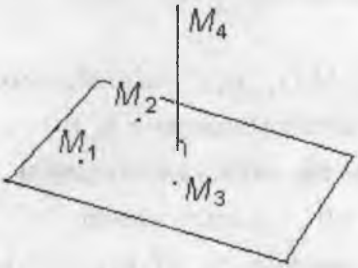
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Расстояние от точки $M_4(x_4, y_4, z_4)$ *до плоскости* $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$ – это длина перпендикуляра, опущенного из точки M_4 на плоскость (см. рисунок ниже) . Это расстояние дается следующей формулой:

$$d = \frac{\left|A\,x_4 + B\,y_4 + C\,z_4 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример 9[6]. Найти расстояние от точки $M_4(0,\ 3, -4)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,0,1), M_2(2,-3,\ 0)$ и $M_3(0,\ 1,\ 1)$ (см. рисунок).



Сначала получим уравнение плоскости проходящей через три заданные точки. Подставляя координаты

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2) \text{ и } M_3(x_3, y_3, z_3)$$

в определитель, получим:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 2-1 & -3-0 & 0-1 \\ 0-1 & 1-0 & 1-1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Раскрывая определитель, найдем:

$$0 + (y-0) + (z-1) + (x-1) - 0 - 3(z-1) = 0,$$

$x + y - 2z + 1 = 0$ – это и есть искомое уравнение.

Сравнивая его с каноническим видом $Ax + By + Cz + D = 0$, получим $A = 1,\ B = 1,\ C = -2$ и $D = 1$. Расстояние от данной плоскости до точки M_4 найдем, воспользовавшись формулой:

---

[6] Эту задачу можно переформулировать так: Даны вершины тетраэдра M_1, M_2, M_3 и M_4. Найти длину высоты тетраэдра, опущенную из вершины M_4 на грань $M_1M_2M_3$.

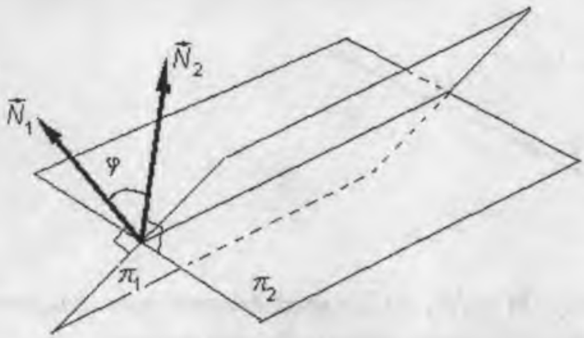
$$d = \frac{|Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + -2(-4) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (2)^2}} = \frac{12}{\sqrt{6}} =$$

$$= 2\sqrt{6}$$

Плоскости будут параллельны, если их нормальные векторы коллинеарны, т.е $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$. Если при этом обе плоскости содержат хотя бы одну общую точку, то они совпадают.

Пример 10. Плоскости $3x - 2y + z - 1 = 0$ и $-6x + 4y - 2z + 2 = 0$ — совпадают. Действительно: $\vec{N}_1 = (3, -2, 1)$ и $\vec{N}_2 = (-6, 4, -2)$ – коллинеарны т.к. $\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} = \frac{1}{-2}$. Более того, точка $M(1, 1, 0)$ удовлетворяет обеим плоскостям (проверьте!).

Если две плоскости не параллельны, то они обязательно пересекаются по прямой линии (см. рисунок ниже)



При этом за (двугранный) *угол пересечения плоскостей* принимают наименьший угол между их векторами-нормалями $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$.

Пример 11. Найти угол между пересекающимися плоскостями

$$-x - 2y + 2z + 1 = 0 \text{ и } 3x + 4z - 6 = 0.$$

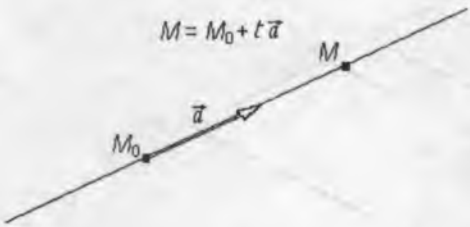
Получим: $\vec{N}_1 = (-1, -2, 2)$, $\vec{N}_2 = (3, 0, 4)$. Очевидно, что $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ не коллинеарны. Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|} = \frac{-1\cdot 3 - 2\cdot 0 + 2\cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 0 + 4^2}} = \frac{5}{3\cdot 5} = 1/3.$$

Окончательно: $\varphi = \arccos\frac{1}{3}$.

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

Если нам известен вектор задающий направление прямой $\vec{a} = (p, q, s)$ (*направляющий вектор*) и какая-нибудь точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на этой прямой, то по формуле $M = M_0 + t\vec{a}$, задавая различные значении *параметра t* можно вычислить координаты любой точки лежащей на этой прямой (см. рисунок ниже). Понятно, что каждая такая точка $M(x, y, z)$ будет иметь свое значение пармера.



Расписав формулу $M = M_0 + t\vec{a}$ в координатном виде, получим систему – *параметрическую форму записи уравнений прямой*,

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + st \end{cases}.$$

Если теперь каждую строку системы разрешить относительно параметра t, а полученные выражения приравнять друг другу, то получим *каноническую форму записи уравнений прямой*:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{s}=t\ .$$

Эта форма несет наибольшую информацию о прямой. Числа p, q и s – это координаты направляющего вектора прямой, а точка, через которую проходит прямая, задается тройкой чисел $(x_0\ , y_0 , z_0)$.

Пример 12. Прямая в канонической записи: $\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{-1}$ – проходит через точку $M_0(4,-1,\ 0)$, в направлении, задаваемом вектором $\vec{a}=(2,0,-1)$. Кстати, параметрические уравнения этой прямой запишутся так $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}$.

Замечание: каноническая форма записи уравнений прямой $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{s}$ представляет собой два уравнения. Их надо рассматривать как упрощенную символическую запись параметрических уравнений прямой; поэтому «0» в знаменателе дроби здесь вполне допустим.

Как указывалось ранее, если две плоскости не параллельны, то они обязательно пересекаются по прямой линии. Такая прямая однозначно определяется заданием уравнений двух плоскостей, записанных в виде системы:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (4)$$

Эту же прямую можно записать в каноническом виде. Вспомним, что для канонической записи надо знать координаты какой-нибудь точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежащей на нашей прямой и вектор $\vec{a}$ – задающий ее направление. Понятно, что точка M_0 принадлежащая прямой также принадлежит обеим плоскостям, следовательно, ее координаты (x_0, y_0, z_0) удовлетворяют системе (4). Подобрать эти координаты можно так: положив, например, $z_0 = 0$; получится такая система:

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0 \end{cases},$$

решив которую, найти недостающие x_0 и y_0[7].

Далее, обратим внимание на том факт, что наша прямая перпендикулярна нормальным векторам $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Поэтому, и любой вектор на этой прямой (в том числе и направляющий $\vec{a}$) будет перпендикулярен векторам $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Воспользовавшись векторным произведением, координаты направляющего вектора $\vec{a}$ получим по формуле:

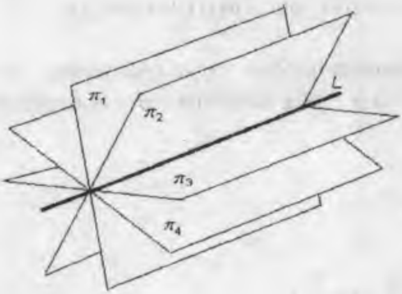
$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = p\vec{i} + q\vec{j} + s\vec{k}$$

Теперь мы знаем $\vec{a} = (p, q, s)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$, так что выписать канонические уравнения не составит труда.

Попробуем решить обратную задачу: получить прямую, изначально заданную в каноническом виде – в виде пересечения двух плоскостей. Эта задача не имеет однозначного решения; действительно, через одну прямую можно провести не две, а целый *пучок плоскостей* (см.рисунок ниже).

---

[7] Если полученная система не имеет решений, то можно попробовать положить $x_0 = 0$, а y_0, z_0 вычислить .



Но если из пучка выбрать две различных плоскости, а их уравнения записать в виде системы (4 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ (), то поставленная задача будет решена.

Чтобы получить уравнения двух плоскостей, поступим так: две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ выберем на прямой, точку $M_3(x_3, y_3, z_3)$ - на первой плоскости, а точку $M_4(x_4, y_4, z_4)$ – на второй плоскости. По точкам M_1, M_2 и M_3 получим уравнение первой плоскости, а по точкам M_1, M_2 и M_4 – второй.

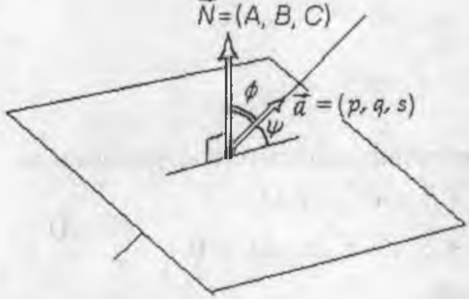
Замечание: Если известны уравнения двух пересекающихся плоскостей в пучке: $A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то получить уравнение любой другой плоскости можно меняя лишь значения параметров α и β в формуле *пучка плоскостей*:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Например, полагая $\alpha = 0$, $\beta = 1$, мы получим уравнение второй плоскости.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ.

Если прямая не параллельна плоскости, то она пересечет ее в какой-то одной точке. Найдем угол ψ – под которым прямая пересекает плоскость (см. рисунок).



Пусть плоскость: $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая:

$\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{s}$ пересекаются под углом ψ, при этом нормальный вектор плоскости $\vec{N}=(A,B,C)$ и направляющий вектор прямой $\vec{a}=(p,q,s)$ – расположены под углом $\varphi=90^0-\psi$. Но $\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a},\vec{N})}{|\vec{a}||\vec{N}|}$. Ннаконец, учитывая, что $\cos(90^0-\psi)=\sin\psi$, получим: $\sin\psi=\dfrac{(\vec{a},\vec{N})}{|\vec{a}||\vec{N}|}$, или : $\psi=\arcsin\dfrac{(\vec{a},\vec{N})}{|\vec{a}||\vec{N}|}$.

Пример 13. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ и плоскости $2x-y+3z+4=0$, а также угол, под которым прямая пересекает плоскость.

Решение: Точка пересечения M одновременно лежит на прямой и на плоскости. Перепишем уравнения прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases};$$

а теперь подставим x, y и z в уравнение прямой:
$2(2+t) - t + 3(1-t) + 5 = 0$.

Решая это уравнение, находим $t = -6$; именно это значение параметра t в уравнениях прямой соответствует точке пересечения с плоскостью. Собственно координаты точки M найдем, если подставим $t = -6$ в параметрическую запись прямой: $\begin{cases} x = -4 \\ y = -6, \\ z = 7 \end{cases}$ т.е. $M(-4, -6, 7)$.

По формуле: $\sin\psi = \dfrac{(\vec{a}, \vec{N})}{|\vec{a}||\vec{N}|}$ найдем синус угла под которым прямая пересекает плоскость:

$$\sin\psi = \frac{(1, 1, -1)\cdot(2, -1, 3))}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{-2}{\sqrt{42}}.$$

Отбрасывая « − » окончательно получим: $\psi = \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{42}}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Даны вершины треугольника: A(1, 0, 1), B(2, 0, 3) и C(0, 3, 1). Найти длину высоты опущенной из вешины: 1) A, 2) B, 3) C.
   а) Найти угол между высотой, опушенной из вершины A и стороной:
      1) AB, 2) AC.
   б) Угол между высотами, опушенными из вершин:
      1) A и B, 2) A и C, 3) B и C.

2. Дано: $\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, угол между $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 30^0.

а) Найти длину вектора: 1) $\vec{a}$, 2) $\vec{b}$, 3) $\vec{a}+\vec{b}$, 4) $\vec{a}-\vec{b}$.

б) Угол между векторами: 1) $\vec{a}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, 2) $\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$.

в) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах:

1) $\vec{a}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, 2) $\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$.

3. Даны вершины пирамиды-тетраэдра: A(1, 0, 1), B(2, 0, 3), C(0, 3, 1) и D(-1, 3, 5).

а) Найти объем пирамиды, вершины которой расположены в серединах ребер исходной пирамиды ABCD.

б)Написать уравнение плоскости содержащей грань:
1) ABC, 2) ADB, 3) ADC, 4) DBC, 5) BCD.

в) Найти длину высоты пирамиды ABCD, опушенную из вершины:
1) A, 2) B, 3) C, 4) D.

г) Записать в каноническом виде прямую содержащую высоту пирамиды ABCD, опушенную из вершины: 1) A, 2) B, 3) C, 4) D.

е) Найти угол между гранями:

1) ABC и ADC, 2) ABC и ADB, 3) ABC и DBC.

4. Даны прямые $l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{0}$, $l_2: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ и плоскость $\pi: 7x-3y+z=1$.

а) Написать уравнение плоскости параллельной обеим прямым и проходящей через начало координат.

б) Написать уравнение плоскости перпендикулярной l_1 и проходящей через точку пересечения:

1) l_1 и π, 2) l_2 и π, 3) l_2 и плоскости xOy.

в) Получить уравнения прямой проходящей через точки пересечения прямых l_1 и l_2 с плоскостью π.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. СПб.: Лань, 2004.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1984.
3. Минорский В.И. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1987.

Оглавление

Учебно-методическое издание

Черников Геннадий Витальевич

Аналитическая геометрия.

Методические указания
к практическим занятиям по математике
для студентов вечернего факультета.

Подписано в печать -26.12.05. Формат - 60×84/16 Тираж 100 экз.

Усл. печ. листов - 1,75. Заказ - 776. Изд. № 4 - 05.

127994, Москва, ул. Образцова, 15. Типография МИИТа