М.У Жук В.Д уч 1
№2516 Теория вероятностей. Ма
03 14924 тематическая статис|'06

МОСКОВСКИЙ ГО
ПУТЕ

Кафедра «Вычислительная математика»

В.Д. Жук, Н.Б. Логинова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Рекомендовано редакционно–издательским советом университета

в качестве методических указаний

для студентов строительных специальностей

УЧЕБНАЯ
БИБЛИОТЕКА
МИИТа

Москва - 2006

УДК 519.6
Ж85

Жук В.Д., Логинова Н.Б. Теория вероятностей. Математическая статистика: Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Высшая математика». – М.: МИИТ, 2006 – 38 с.

Данные методические указания представляют собой продолжение пособий по лабораторному практикуму для студентов 2–го курса строительных специальностей ИПСС. Тематика работы соответствует содержанию теоретического курса «Теория вероятностей и введение в математическую статистику».

В процессе выполнения данных лабораторных работ студенты должны ознакомиться с датчиками случайных (псевдослучайных) чисел, методом статистических испытаний (методом Монте–Карло), а также научиться применять полученные теоретические знания на примерах приближенного вычисления определенного интеграла, при первичной статистической обработке результатов наблюдений, а также при решении простейших задач статистического моделирования.

Цель лабораторных работ состоит в лучшем усвоении студентами понятий «классическая вероятность», «геометрическая вероятность», «случайное число», «статистическое моделирование», «обработка результатов наблюдений» и др., в получении навыков алгоритмизации решения вероятностных задач, составления соответствующих программ и их отладки на ЭВМ.

При выполнении работ требуются знания из уже пройденных курсов математики и информатики.

УЧЕБНАЯ
БИБЛИОТЕКА
МИИТ

© Московский государственный
университет путей сообщения
(МИИТ), 2006

1. Теоретический минимум

1.1. Метод статистических испытаний. Это численный метод решения математических задач, основанный на моделировании случайных величин или случайных процессов и последующем вычислении статистических оценок для изучаемых величин. Другое название метода статистических испытаний – ***метод Монте–Карло***. Универсальность метода статистических испытаний как метода вычислительной математики определяется возможностью его использования для решения задач, не связанных со случайностью. Эта возможность достигается путем построения вспомогательных вероятностных моделей, параметрами которых являются подлежащие определению постоянные величины.

Суть метода статистических испытаний состоит в воспроизведении большого числа реализаций случайного процесса, специально построенного по условиям задачи. Этот случайный процесс формируется таким образом, чтобы его вероятностные характеристики (вероятности некоторых событий, математические ожидания случайных величин, вероятности попадания траекторий процесса в заданную область фазового пространства и т.д.) были равны искомым величинам рассматриваемой задачи.

Вследствие выполнения сравнительно большого числа реализаций, необходимых для получения результата с достаточной точностью и достоверностью, метод Монте–Карло стал широко применяться в связи с появлением *ЭВМ*, когда программно или аппаратно генерируются случайные числа, являющиеся исходным материалом для реализации данного метода.

Общая схема применения метода Монте–Карло состоит в построении и запоминании возможных значений некоторой случайной величины $X = X[x_1, ..., x_n]$, зависящей от траекторий случайного процесса. Среднее значение этой величины, полученное в результате осуществления достаточно большого числа реализаций процесса, и является искомым решением данной задачи.

Сущность метода статистических испытаний поясним на примерах.

Задача А. Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$J = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad (1)$$

где $0 \le f(x) \le 1$ при всех x, удовлетворяющих условию $0 \le x \le 1$. Предположим, что в нашем распоряжении имеется достаточно обширная совокупность независимых случайных чисел x_i (например, полученных в результате некоторого случайного эксперимента), являющихся возможными значениями случайной величины X, которая распределена равномерно на отрезке [0; 1]. Тогда очевидно, что пары случайных чисел $(x_{2i-1}; x_{2i})$, $i=\overline{1,n}$, можно интерпретировать как случайные точки, равномерно распределенные в единичном квадрате. Последнее означает, что *вероятность попадания случайной точки* $(x_{2i-1}; x_{2i})$ *в некоторую область* Ω, *принадлежащую единичному квадрату, пропорциональна площади области* Ω и не зависит от ее расположения в единичном квадрате. Для любой пары $(x_{2i-1}; x_{2i})$ можно проверить справедливость неравенства

$$x_{2i} \le f(x_{2i-1}). \tag{2}$$

Если это неравенство выполнено, то точка $(x_{2i-1}; x_{2i})$ лежит на кривой $f(x)$ или ниже ее (событие A); в противном случае точка $(x_{2i-1}; x_{2i})$ располагается выше кривой $f(x)$ (противоположное событие $\overline{A}$).

Проведем N испытаний, состоящих в выборе пар $(x_{2i-1}; x_{2i})$ и проверке справедливости неравенств вида (2). Пусть число точек, для которых неравенство (2) выполнено, равно n^*. Тогда отношение $\frac{n^*}{N}$ является ***частотой*** наступления события A. Известно, в силу закона больших чисел, что *частота некоторого события при достаточно больших N стремиться к вероятности этого события*. В рассматриваемом случае вероятность $P(A)$ представляет собой долю площади единичного квадрата, приходящуюся на ту его часть, которая расположена под кривой $f(x)$, и поэтому равна искомому значению интеграла (1). Таким образом, частоту $\frac{n^*}{N}$ можно принять в качестве приближенного значения $J_{\text{пр}}$ интеграла (1): $J_{\text{пр}} = \frac{n^*}{N} \approx J$.

Задача Б. Железнодорожный состав из 9 вагонов и вагона–ресторана формируется произвольным образом. Какова вероятность следующих событий:

а) вагон №7 и вагон–ресторан будут расположены рядом (событие A);

б) между вагоном №7 и вагоном–рестораном окажется 5 вагонов (событие B)?

Процесс формирования состава – случайный. Задача состоит в моделировании этого процесса и многократном его повторении. При этом для каждой реализации выясняется, осуществились ли события A и B.

Пусть проведено N реализаций процесса формирования состава и в n из них произошло событие A, а в m – событие B. Тогда статистические частоты событий A и B, соответственно, равны $\frac{n}{N}$ и $\frac{m}{N}$. Как уже отмечалось, при увеличении числа реализаций процесса эти частоты стремятся к вероятностям событий A и B, то есть $P(A) \approx \frac{n}{N}$, $P(B) \approx \frac{m}{N}$.

Вопрос состоит в том, как смоделировать на *ЭВМ* процесс формирования состава. Предположим, что у нас имеется 10 пронумерованных позиций, на которых могут располагаться вагоны при формировании состава:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Вагон №7, как и вагон–ресторан, в равной степени могут оказаться на любой из позиций. Пусть у нас имеется датчик, случайным образом выдающий по нашему запросу равномерно распределенные целые числа от 1 до 10. «Выбросим» два случайных числа ξ и η ($1 \le \xi \le 10$; $1 \le \eta \le 10$). Будем считать, что первое из них – ξ – обозначает номер позиции, на которой оказался вагон №7, а второе – η – номер позиции, на которой оказался вагон–ресторан.

Событию A соответствует одна из следующих расстановок вагонов:

а) ($\xi \ne 1$ и $\xi \ne 10$) и ($\eta = \xi - 1$ или $\eta = \xi + 1$), то есть вагон №7 находится в середине состава (не в «голове» и не в «хвосте»), а вагон–ресторан находится слева или справа от него;

б) $\xi = 1$ и $\eta = 2$, то есть вагон №7 находится в «голове» состава, а вагон–ресторан – сразу за ним;

в) $\xi = 10$ и $\eta = 9$, то есть вагон №7 находится в «хвосте» состава, а вагон–ресторан – перед ним.

С помощью логических символов, например, можно записать, что событие A наступит, если будет выполнено условие:

$$\big(((\xi > 1) \,\&\, (\xi < 10)) \,\&\, (|\xi - \eta| = 1)\big) \vee \big((\xi = 1) \,\&\, (\eta = 2)\big) \vee \big((\xi = 10) \,\&\, (\eta = 9)\big).$$

Событию B соответствует, как легко проверить, такая расстановка вагонов, для которой выполнено равенство $|\xi - \eta| = 6$.

Таким образом, процесс моделирования процедуры формирования железнодорожного состава, достаточный для решения поставленной задачи, сводится, во-первых, к однократному «выбрасыванию» двух случайных целых чисел, равномерно распределенных на отрезке [1; 10], и во-вторых, к проверке истинности логических выражений (отношений), соответствующих наступлению событий A и B.

Задача В. Машинист движущегося поезда (поезда I) может заметить впереди стоящий поезд (поезд II) на расстоянии x м, равномерно распределенном на отрезке [100; 250] м. Величина тормозного пути поезда I равна y м, где y – случайная величина, распределенная равномерно на отрезке [50; 120] м. Машинист поезда II за это время может отвести свой поезд на расстояние z м, равномерно распределенное на отрезке [0; 30] м. Найти вероятность того, что столкновения поездов не произойдет.

Описанный процесс можно смоделировать следующим образом. Предположим, что в *ЭВМ* имеется датчик случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. (Это предположение справедливо, так как практически все современные системы программирования имеют подобные датчики). «Выбросим» с помощью данного датчика три случайных числа ξ, η и ζ ($0 \le \xi \le 1$; $0 \le \eta \le 1$; $0 \le \zeta \le 1$). Тогда для одной реализации процесса имеем:

– расстояние между поездами в момент, когда машинист поезда I увидит впереди стоящий поезд II, равно $x = 100 + \xi(250 - 100)$ м;
– тормозной путь поезда I составит $y = 50 + \eta(120 - 50)$ м;
– поезд II успеет отойти на $z = 30\zeta$ м.

Если тормозной путь y оказывается не большим, чем расстояние между поездами в момент остановки поезда I, то есть если $y \le x + z$, то, очевидно, столкновения поездов не произойдет (событие A); в противном случае столкновение неизбежно (событие B).

Пусть проведено N реализаций процесса и в n из них произошло событие A. Тогда вероятность этого события, то есть вероятность того, что столкновения поездов не произойдет, приблизительно равна $P(A) \approx \dfrac{n}{N}$.

Задача Г. Плоскость разграфлена параллельными вертикальными и горизонтальными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r \le a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

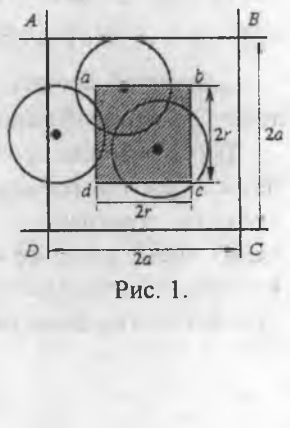

Рис. 1.

Аналитически эта задача решается с помощью так называемой геометрической вероятности. Искомая вероятность равна отношению площадей квадратов $abcd$ со стороной $2r$ и

$ABCD$ со стороной $2a$ (рис.1):

$$P(A) = \frac{(a-r)^2}{a^2}.$$

Очевидно, что квадрат *abcd* содержит центры монет, которые не пересекают ни одну из прямых. Если же центр монеты попадает за границы квадрата *abcd*, то пересечение монеты хотя бы с одной прямой обязательно произойдет.

Для решения данной задачи методом Монте–Карло смоделируем описанную в ней ситуацию. «Выбросим» два случайных числа x и y, равномерно распределенных на отрезке $[0; a]$. Пусть x – абсцисса точки $M(x; y)$ плоскости XOY с началом координат в левом нижнем углу, а y – ордината этой точки. Если центр монеты совпадает с точкой $M(x; y)$, то условие, при котором монета не пересечет ни одну из прямых, записывается в виде логического выражения:

$$(r \le x)\ \&\ (x \le 2a - r)\ \&\ (r \le y)\ \&\ (y \le 2a - r). \tag{3}$$

Проведем N реализаций процесса, и пусть только в n из них произошло событие A – монета не пересекла ни одну из прямых, то есть выполнилось отношение (3). Тогда вероятность $P(A)$ события A приблизительно будет равна $P(A) \approx \dfrac{n}{N}$.

В настоящее время методами Монте–Карло, реализуемыми на *ЭВМ*, решаются многие практические задачи, такие как вычисление кратных интегралов, решение систем алгебраических уравнений высокого порядка, решение интегральных уравнений, нахождение обратных матриц и т.д. Большое теоретическое и практическое значение получили исследования процессов функционирования сложных систем, к которым относятся разнообразные производственные и информационные системы, автоматизированные системы управления, некоторые экономические и биологические системы и др.

1.2. Датчики случайных (псевдослучайных) чисел. Случайные числа – искусственно получаемая последовательность значений случайной величины с заданным законом распределения. При решении задач методом Монте–Карло без помощи *ЭВМ* источниками получения случайных чисел служили различные эксперименты (бросание монеты, игральной кости, извлечение карт из тщательно перетасованной колоды, кручение рулетки и т.п.). Именно с названием города Монте-Карло в княжестве Монако, известного своими игорными домами, и связано название метода статистических испытаний.

В настоящее время известны три основные способа получения случайных чисел:

– с помощью таблиц случайных чисел;
– аппаратно – с помощью специальной электронной приставки к *ЭВМ*;
– путем замены случайных чисел последовательностью так называемых псевдослучайных чисел, получаемых в результате вычислений с помощью специальных программ.

Процесс получения псевдослучайных чисел основан на использовании некоторых рекуррентных соотношений. Это означает, что каждое последующее число ξ_{k+1} образуется из предыдущего ξ_k (или группы предыдущих чисел) на основе ряда арифметических и логических операций. Так, псевдослучайные точки $\xi_{i,j}$, равномерно распределенные в единичном многомерном кубе, можно, например, вычислить по формуле:

$$\xi_{i,j} = \left\{ \frac{R_{i,j}}{p} \right\},$$

где $i = 1, 2, \ldots$ – номер точки;

$j = 2, 3, \ldots$ – номер координаты этой точки;

$R_{i,j} = K_{i,1} \cdot K_{i,j-1}$;

$R_{i,1} = gK_{i-1,1}$;

$K_{0,1} = 1$;

$$K_{i,j-1} = R_{i,j-1} - p \cdot \left[\frac{R_{i,j-1}}{p} \right];$$

$\left\{ \dfrac{R_{i,j}}{p} \right\}$ – дробная часть числа $\dfrac{R_{i,j}}{p}$;

$\left[\dfrac{R_{i,j-1}}{p} \right]$ – целая часть числа $\dfrac{R_{i,j-1}}{p}$;

p – простое число вида $p = 2p_1 + 1$, где p_1 – простое число;

g выбирается следующим образом: $g \approx \dfrac{p}{2}$ и $g = p - 3^m$, где m – целое положительное число.

Несмотря на кажущуюся простоту, разработка «хорошего» датчика случайных чисел – задача весьма трудоемкая, так как избежать детерминизма последовательности псевдослучайных чисел практически невозможно.

Имея равномерно распределенную случайную величину, можно получить случайную величину с заданным законом распределения.

Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке [0; 1]. Обозначим ее значения через x_i. Предположим, что необходимо получить случайную величину Y с заданной функцией распределения $F(y)$. В качестве значений случайной величины Y берут значения $y_i = f(x_i)$, где $f(x)$ выбирают таким образом, что

$$F(y) = \int_{-\infty}^{f^{-1}(y)} h(t)dt,$$

где $h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \le 0,\ t \ge 1 \end{cases}$, а $f^{-1}(y)$ – функция, обратная к $f(x)$.

Например, чтобы получить случайную величину с экспоненциальным законом распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$, функцию $f(x)$ выбирают в виде $f(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{\lambda}$.

Однако для реализации более удобен следующий метод получения случайной величины X с заданной плотностью распределения $f(x)$ на интервале $(a; b)$:

– если область возможных значений случайной величины X – интервал $(a; b)$ – не ограничена, то переходим к усеченному распределению, ограничив a и/или b:

– заменой переменных $y = \dfrac{x-a}{b-a}$ переходим к случайной величине Y, распределенной на отрезке [0; 1] по закону $f_Y(y) = (b-a)f_X(a+(b-a)y)$; в этом случае график функции $g(y) = \dfrac{(b-a)f_X(a+(b-a)y)}{\max\limits_{0 \le y \le 1} f_Y(y)}$ окажется вписанным в единичный квадрат (рис. 2);

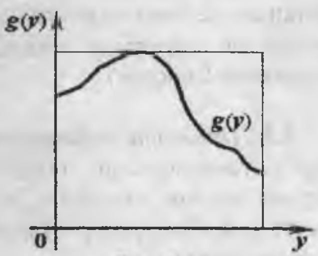

Рис. 2.

– из совокупности случайных точек, равномерно распределенных в единичном квадрате, выбираем случайную точку $S_i(y_{2i}, y_{2i+1})$,

$i = 0, 1, \ldots$ (очередную точку S_k получаем с помощью двойного обращения к датчику равномерно распределенных на отрезке [0; 1] случайных чисел);

– проверяем, выполняется ли условие вида (2) $y_{2i+1} \le g\ (y_{2i})$, то есть попадает ли точка S_i под (или на) график функции $g\ (y)$; если это условие выполнено, то значение x_i случайной величины X определяется из равенства $x_i = a + y_{2i}(b - a)$; если же условие не выполнено, то точка S_i отбрасывается и выбирается новая точка S_{i+1}.

Чтобы получить случайные числа, распределенные по нормальному закону, можно использовать ***метод суммирования***.

Пусть x_i ($i = \overline{1, n}$) – совокупность случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. Тогда случайная величина $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$

$$y_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - \dfrac{n}{2}}{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n}{3}}}\sigma + M \tag{4}$$

при $n \to \infty$ будет распределена по нормальному закону с параметрами (M, σ). Закон распределения случайной величины Y будет близок к нормальному уже при $n = 10$.

Случайные числа, применяемые при моделировании случайных процессов, должны удовлетворять двум основным требованиям: с достаточной точностью воспроизводить поведение моделируемой случайной величины с заданным законом распределения и требовать минимального числа машинных операций, затрачиваемых на формирование одного случайного числа. Всякая последовательность случайных чисел лишь приближенно воспроизводит поведение моделируемой случайной величины. О точности такого приближения обычно судят по результатам статистической обработки последовательности случайных чисел достаточно большого объема, используя известные статистические критерии, например, критерий χ^2 (критерий Пирсона).

1.3. Предварительная обработка результатов наблюдений. Это раздел математической статистики, методы которого позволяют получить первичные представления о той вероятностной ситуации, которая имеет место при обработке результатов наблюдений, содержащих случайную составляющую.

Пусть x_i ($i = \overline{1, n}$) – значения некоторой случайной величины X. Например, это может быть некоторая конечная последовательность псевдослучайных чисел, генерируемых программным датчиком. В статистике такая последовательность называется ***выборкой***.

По результатам наблюдений получают:

а) ***точечные оценки***:

– выборочное математическое ожидание m_X:

$$m_X = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,; \tag{5}$$

– выборочную дисперсию D_X:

$$D_X = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_X)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\cdot m_X^2\right); \tag{6}$$

– выборочное среднеквадратическое отклонение σ_X:

$$\sigma_X = \sqrt{D_X}\,; \tag{7}$$

б) ***эмпирическую функцию распределения*** $F^*(x) = \dfrac{n(x)}{n}$, где $n(x)$ – количество значений x_k из рассматриваемой выборки объема n, для любого действительного числа x удовлетворяющих неравенству $x_k < x$;

в) ***гистограмму частот, или гистограмму относительных частот*** – графический аналог плотности распределения, который дает наглядное представление о случайной величине.

Для построения гистограммы ***размах*** $R = x_{max} - x_{min}$ ***выборки*** разбивается на несколько (m) промежутков (интервалов), как правило, одинаковой длины $L = \dfrac{R}{m}$. Затем составляется ***массив частот*** ν_k ($k = \overline{1, m}$), то есть количества попаданий значений случайной величины X в k–ый интервал. На каждом промежутке строится прямоугольник с основанием L и высотой $\dfrac{\nu_k}{h}$. Полученный чертеж называется ***гистограммой частот*** (рис. 3). Площадь под гистограммой частот равна сумме всех частот, то есть объему n выборки.

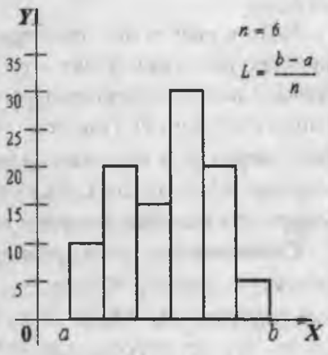

Рис. 3.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основанием L и высотами $\dfrac{\omega_k}{L}$, где $\omega_k = \dfrac{\nu_k}{n}$ ($k = \overline{1, m}$) – ***относительные частоты*** наблюдений, значения которых попадают в k–ый интервал. Площадь k–ого частичного прямоугольника равна ω_k, а площадь под всей гистограммой относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть единице.

1.4. Критерий χ^2 (критерий Пирсона). Этот критерий применяется для установления степени согласованности теоретического и статистического распределений случайной величины X. По итогам первичной обработки результатов наблюдений – точечным оценкам и гистограммам – можно составить представление о степени близости этих двух распределений друг другу. Однако оценить с помощью точечных оценок и гистограмм, насколько эти распределения близки, мы можем лишь качественно. Количественные оценки дает критерий χ^2 (критерий Пирсона).

Введем следующие понятия.

Статистическая гипотеза – гипотеза о виде распределения или о его параметрах; ***гипотеза H_0*** – выдвинутая (нулевая или ***основная***) статистическая гипотеза, ***гипотеза H_1*** – гипотеза, противоположная выдвинутой (***альтернативная***). Например, пусть нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что датчик случайных чисел выдает числа, равномерно распределенные на отрезке $[a; b]$. Тогда альтернативная гипотеза H_1 состоит в том, что полученные случайные числа не будут распределены равномерно на отрезке $[a; b]$.

Если в результате проверки справедливости выдвинутой гипотезы правильная гипотеза будет отвергнута, то говорят, что совершена ***ошибка первого рода***. Вероятность совершить ошибку первого рода (то есть вероятность отклонить гипотезу H_0, которая в действительности верна) обозначают через α и называют ***уровнем значимости***. Наиболее часто α берут равным 0.1, 0.05, 0.01. Если же принята неверная гипотеза, то говорят, что совершена ***ошибка второго рода***.

Статистическим критерием (или просто ***критерием***) называют случайную величину $\mathfrak{R}$, которая служит для проверки справедливости нулевой гипотезы H_0. Множество всех возможных значений критерия разбивают на два непересекающихся подмножества: одно подмножество составляют значения критерия, при которых нулевая гипотеза H_0 отвергается; другое подмножество – те значения критерия, при которых нулевая гипотеза H_0 принимается.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу H_0 отвергают. ***Областью допустимых значений*** (***областью принятия гипотезы***) называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу H_0 принимают.

Критическими точками (***границами***) $k_{\text{кр}}$ называют точки, отделяющие критическую область от области допустимых значений. Различают одностороннюю (правостороннюю: $\mathfrak{R} > k_{кр}$; левостороннюю: $\mathfrak{R} < k_{кр}$) и двухстороннюю ($|\mathfrak{R}| > k_{кр}$) критические области. Чтобы описать критическую область, достаточно определить ее критические точки. Для этого задают уровень значимости α. Критические точки ищут исходя из того, что при справедливости нулевой гипотезы H_0 вероятность принять критерием $\mathfrak{R}$ значение, большее (меньшее) $k_{кр}$, будет равна заданному уровню значимости α, то есть

$$P(\mathfrak{R} > k_{кр}) = \alpha \qquad \left(P(\mathfrak{R} < k_{кр}) = \alpha,\ P(|\mathfrak{R}| > k_{кр}) = \alpha\right). \tag{8}$$

Для вычислений значений того или иного критерия $\mathfrak{R}$ существуют специальные таблицы и программы.

Критерий χ^2 (критерий Пирсона) применяют для проверки гипотезы H_0 о том, что случайная величина X, полученная по выборке x_i ($i = \overline{1, n}$), будет иметь плотность распределения $f_X(x)$.

При применении критерия χ^2, как и при построении гистограмм, область изменения значений случайной величины X разбиваем на интервалы длины Δ_k ($k = \overline{1, m}$) и определяем частоту ν_k и теоретическую вероятность p_k попадания значений этой случайной величины в интервал Δ_k.

Теоретические вероятности p_k вычисляется следующим образом. Пусть рассчитанные границы интервала Δ_k равны ξ_{k-1} и ξ_k, то есть $\Delta_k = [\xi_{k-1}; \xi_k]$. Тогда, как известно, вероятность p_k попадания случайной величины X в интервал Δ_k равна

$$p_k = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f(x)dx\,. \tag{9}$$

Если задана (или найдена) функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X, то вероятность p_k равна

$$p_k = F_X(\xi_k) - F_X(\xi_{k-1}). \tag{10}$$

Далее вычисляем значение случайной величины (статистику), которая распределена по закону χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\nu_k - np_k)^2}{np_k}\,. \tag{11}$$

В предположении справедливости гипотезы H_0 по уровню значимости α и ***числу степеней свободы*** $K = m - 1$ находим с помощью таблицы границу критической области $\chi^2_{кр}$. Если оказалось, что $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза H_0 принимается; в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

2. Лабораторная работа № 1

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА МЕТОДОМ МОНТЕ–КАРЛО

2.1. Задание на лабораторную работу. Пользуясь методом статистических испытаний, вычислить определенный интеграл J

$$J = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

где функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$: $f(x) \geq 0$.

Для выполнения задания необходимо:

1. Изучить данные методические указания в необходимом для проведения лабораторной работы объеме.
2. Получить у преподавателя исходные данные для своего варианта работы.
3. Рассчитать аналитически (вручную) точное значение интеграла или получить первообразную от подынтегральной функции с тем, чтобы получение точного значения перепоручить *ПЭВМ.*

Замечание. Выполнение данного пункта задания при изменении исходных данных (см. замечание ниже) в каждом конкретном случае определяет преподаватель.

4. Найти аналитически максимальное значение f_{max} функции $y = f(x)$ на отрезке$[a; b]$.
5. Написать программу реализации задания на знакомом (и доступном для рабочей *ПЭВМ*) языке программирования, предварительно разработав алгоритм реализации задания (для отчета не представляется).

Описательно алгоритм состоит в следующем.

а) Согласно второй теореме Вейерштрасса, функция $f(x)$, непрерывная на отрезке, достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений. Пусть f_{max} – максимальное значение функции $f(x)$, которое достигается в точке $x = c$. Впишем график функции $f(x)$ в прямоугольник $П$ с основанием $[a; b]$ и высотой f_{max}. (Постройте на одном рисунке графики функции $y = f(x)$ и прямоугольника $П$).

«Бросаем» на прямоугольник $П$ равномерно распределенные на нем точки $(x; y)$. Каждая точка получается путем двойного обращения к датчику равномерно распределенных на отрезке $[0; 1]$ случайных чисел, например, к процедуре–функции *Random* в системе программирования *PASCAL*. Пусть у нас «выпали» числа ξ и η. Тогда координаты x и y «выпавшей» точки $(x; y)$ вычисляются по формулам: $x = a + \xi(b - a)$, $y = \eta f_{max}$. Далее (см. задачу *А*) проверяем, выполняется ли условие (2) попадания выпавшей точки под (или на) график кривой, то есть справедливо ли неравенство $y \le f(x)$. При выполнении данного условия увеличиваем счетчик числа событий попадания случайной точки под (или на) график кривой на единицу.

Пусть N – общее число случайных точек, «брошенных» на прямоугольник $П$, а n – то количество из них, которое оказалось под (или на) графиком кривой $y = f(x)$. Тогда оценкой искомого интеграла J, согласно правилам вычисления геометрической вероятности, является величина J^*

$$J^* = f_{\max}(b-a)\frac{n}{N},$$

равная доли площади прямоугольника $П$, приходящейся на участок, лежащий под (или на) графиком кривой $y = f(x)$.

б) Последовательно проводим моделирование при N = 10, 20, 50, 100, 500 и 1000.

в) Для каждого такого моделирования вычисляем приближенные значения заданного интеграла.

г) Для оценки точности метода сравниваем полученные результаты с рассчитанным ранее точным значением интеграла.

д) Полученные результаты сводим в таблицу, демонстрирующую увеличение точности метода с увеличением числа N реализации процесса. Структура таблицы разрабатывается самостоятельно.

6. Отладить программу и получить требуемые результаты.

Замечание. Программа при небольших изменениях должна «уметь» считать не только интеграл из задания, но и любой другой, предложенный преподавателем.

2.2. Отчет о работе должен содержать:

1. Задание на работу с конкретными исходными данными для каждого студента.
2. Вычисленное аналитически (вручную) точное значение интеграла.
3. Вычисленное аналитически (вручную) максимальное значение f_{max} функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.
4. Листинг (распечатку) программы на языке программирования.
5. Листинг результатов работы программы.

Пример программы на *PASCALe* и результаты ее работы представлены ниже.

ЗАДАНИЕ: Вычислить методом Монте–Карло определенный интеграл от функции $f(x) = \Phi \cdot \left(\sin\frac{x}{И} + \cos\frac{x}{И} \right)$ в пределах от $a = 0$ до $b = \frac{3\pi}{4}И$, где Φ – количество букв в фамилии студента, $И$ – количество букв в имени студента.

```
Program MonteCarlo_integral;
{ вычисление определенного интеграла методом Монте–Карло, основанным на геометрической вероятности }
var
  x, y, a, b, c, f, u, integral : real;
  i, n1                         : integer;
Function Zadanie (f, u, x:  real): real; { подынтегральная функция }
begin
  Zadanie := f*(sin(x/u) + cos(x/u)); { f = Ф; u = И }
end;

BEGIN
   writeln ('':20, 'Л А Б О Р А Т О Р Н А Я    Р А Б О Т А');
   writeln ('':13, 'Тема: Вычисление определенного интеграла методом Монте–Карло');
   writeln ('Выполнил студент группы СЖД-221 Иванов Иван');
   writeln;
   writeln ('':13, 'ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ:');
   writeln ('Вычислить методом Монте–Карло определенный интеграл');
   writeln ('от функции f(x) = f*(sin(x/u) + cos(x/u)');
   writeln ('в пределах от a = 0 до b = 3*u*pi/4,');
   writeln ('где f = 6 – количество букв в фамилии студента.');
   writeln ('u = 4 – количество букв в имени студента.');
   writeln ('Максимальное значение fmax функции f(x) на [a; b] равно fmax = f*sqrt(2).');
   writeln ('Истинное значение интеграла равно f*u*(sqrt(2) + 1) ~ 57.941.');
   writeln;
   writeln ('Введите исходные данные (a, f, u):');
   readln (a, f, u);
   b := 3*u*pi / 4;
   c := f*u*(1 + sqrt(2)); { истинное значение интеграла }
   writeln;
   writeln ('':20, 'Р Е З У Л Ь Т А Т Ы');
   writeln;
   writeln ('':10, 'n', '':10, 'истинное', '':10, 'смоделированное', '':10, 'ошибка');
   writeln;
   Randomize; { инициализация датчика случайных чисел }
   n1 := 0;
   for i := 1 to 1000 do
```

```
    begin
      x := a + (b - a)*Random;
      y := f*sqrt(2)*Random;
      if y <= Zadanie (f, u, x) then n1 := n1 + 1;
      if (i = 10) or (i = 20) or (i = 50) or (i = 100) or (i = 500) or (i = 1000) then
        begin
          integral := n1*3*u*pi*f*sqrt(2) / (4*i);
          writeln (i:11, c:18:3, integral:25:3, abs (c - integral):16:5);
        end;
    end;
  readln;
END.
```

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Тема: Вычисление определенного интеграла методом Монте–Карло

Выполнил студент группы СЖД-221 Иванов Иван

ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ

Вычислить методом Монте–Карло определенный интеграл
от функции f(x) = f(sin(x/u) + cos(x/u)*
*в пределах от a = 0 до b = 3*u*pi/4*
где f = 6 – количество букв в фамилии студента,
u = 4 – количество букв в имени студента.
*Максимальное значение fmax функции f(x) на [a; b] равно fmax = f*sqrt(2).*
*Истинное значение интеграла равно f*u*(sqrt(2) + 1) ~ 57.941.*

Введите исходные данные (a, f, u):
0
6
4

РЕЗУЛЬТАТЫ

n	истинное	смоделированное	ошибка
10	57.941	55.980	1.96080
20	57.941	55.980	1.96080
50	57.941	59.179	1.23808
100	57.941	59.179	1.23808
500	57.941	58.060	0.11847
1000	57.941	58.699	0.75824

Замечание. При каждом запуске программы результаты, выводимые в третьем и четвертом столбцах таблицы, будут иными, так как процедура–функция *Random* в совокупности с процедурой *Randomize* каждый раз генерирует новый набор случайных чисел.

2.3. Варианты заданий.

№	$f(x)$	a	b	№	$f(x)$	a	b
1	$2x+\sin 2x$	0	π	**13**	$\dfrac{1}{5+2\sqrt{x}}$	1	9
2	$\dfrac{1}{2x-3}$	2	5	**14**	$\dfrac{1}{e^x+1}$	0	$\ln 2$
3	$\dfrac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$	1	e	**15**	$\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$	-1	7
4	$\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$	0	1	**16**	$\dfrac{1}{3+2\cos x}$	0	$\pi/2$
5	$\dfrac{x}{1+x^2}$	1	5	**17**	$(x+1)\ln x$	1	e
6	$\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$	0	$\pi/2$	**18**	$\ln(x^2+4)$	0	2
7	$\mathrm{tg}^2 x$	$\pi/4$	$\pi/3$	**19**	$x^2\sin 2x$	0	$\pi/4$
8	$\dfrac{1}{x^2+x}$	1	3	**20**	$x^2 3^x$	0	1
9	$\dfrac{1}{x^3+x}$	1	3	**21**	$\sqrt{e^x-1}$	0	$\ln 4$
10	$\dfrac{x^2+5}{x-2}$	3	5	**22**	$\dfrac{\sin\ln x}{x}$	1	e
11	$\dfrac{1}{x^2+6x+10}$	-3	3	**23**	$\mathrm{tg}^3 x$	0	$\pi/4$
12	$\begin{cases} e^x, & 0\le x\le 1 \\ 2, & 1\le x\le 2 \end{cases}$	0	2	**24**	$\cos^3 x$	0	$\pi/2$

3. Лабораторная работа № 2
ДАТЧИКИ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

3.1. Задание на лабораторную работу. Получить последовательность псевдослучайных чисел, распределенных по заданному закону $f_X(x)$ на отрезке $[a;\ b]$. Найти статистические характеристики данной случайной последовательности (выборки). Сравнить полученные характеристики с соответствующими характеристиками заданного теоретического закона. Оценить, если требуется, степень согласованности статистического и теоретического распределений с помощью критерия χ^2 (критерия Пирсона).

Для выполнения задания необходимо:

1. Изучить данные методические указания в необходимом для проведения лабораторной работы объеме.
2. Получить у преподавателя исходные данные для своего варианта работы.
3. Написать программу реализации задания на знакомом (и доступном для рабочей *ПЭВМ*) языке программирования, предварительно разработав алгоритм реализации задания (для отчета не представляется) и выполнив необходимые аналитические вычисления.

Описательно алгоритм состоит в следующем.

а) (Напомним, что для формирования заданной последовательности случайных чисел необходимо воспользоваться имеющимся в *ПЭВМ* датчиком случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0; 1], например, процедурой–функцией *Random* в *PASCAL*е)

– Если случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a;\ b]$, то плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X имеет вид:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}.$$

Тогда последовательность псевдослучайных чисел x_i, равномерно распределенных на отрезке $[a;\ b]$, формируем из последовательности псевдослучайных чисел ξ_i, равномерно распределенных на отрезке [0; 1], по формуле:

$$x_i = a + (b-a)\xi_i\ (\ i = \overline{1,n}\ ).$$

Пусть случайная величина X задана на отрезке $[a;\ b]$ плотностью распределения $f_X(x)$. Тогда заменой переменных $y = \dfrac{x-a}{b-a}$ переходим к случайной величине Y, распределенной на отрезке [0; 1] по закону $f_Y(y) = (b-a)f_X(a+(b-a)y)$. В этом случае график функции $g(y) = \dfrac{(b-a)f_X(a+(b-a)y)}{\max\limits_{0 \le y \le 1} f_Y(y)} = \dfrac{f_X(a+(b-a)y)}{\max\limits_{a \le x \le b} f_X(x)}$ окажется вписанным в единичный квадрат.

Из совокупности случайных точек, равномерно распределенных в единичном квадрате, выбираем случайную точку $S_i(y_{2i}, y_{2i+1})$ (i = 0, 1, ...). Координаты точки S_i получаем с помощью двойного обращения к датчику псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. Далее проверяем, выполняется ли условие $y_{2i+1} \le g(y_{2i})$ или $y_{2i+1} \le \dfrac{f_X(a+(b-a)y_{2i})}{\max\limits_{a \le x \le b} f_X(x)}$, то есть попадает ли точка S_i под (или на) график функции $g(y)$. Если это условие выполнено, то значение x_i случайной величины X определяется по формуле $x_i = a + y_{2i}(b-a)$; если же данное условие не выполнено, то точку S_i отбрасываем и выбираем новую точку S_{i+1}.

– Псевдослучайные числа, распределенные по нормальному закону с параметрами (M, σ), получим методом суммирования с помощью псевдослучайных чисел ξ_i, равномерно распределенных на отрезке [0; 1], по формуле (4) (в формуле (4) берем n = 10):

$$x_i = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}\sum_{j=1}^{10}\xi_j - \sqrt{10}\right)\sigma\sqrt{3} + M \quad (i = \overline{1,n}).$$

б) Для выборки $\{x_1, ..., x_n\}$ объема n вычисляются следующие характеристики.

– Размах выборки R: $R = x_{\max} - x_{\min}$; если случайная величина X задана на отрезке [a; b], то $R = b - a$.

– Длина L интервала разбиения отрезка [a; b]: $L = \dfrac{R}{m}$, где m – число интервалов разбиения (L вычисляется для построения гистограмм).

– Выборочное математическое ожидание m_X (по формуле (5)):

$$m_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

– Выборочная дисперсия D_X (по формуле (6)):

$$D_X = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - nm_X^2\right).$$

– Выборочное среднеквадратическое отклонение σ_X (по формуле (7)):

$$\sigma_X = \sqrt{D_X}\ .$$

– Массив частот ν_k $(k = \overline{1,m})$, то есть количества попаданий значений случайной величины X в k–ый интервал.

– Массив относительных частот $\omega_k = \frac{\nu_k}{n}$ $(k = \overline{1,m})$.

– χ^2–статистику (по формуле (11)):

$\chi_X^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\nu_k - np_k)^2}{np_k}$, где χ_X^2 – это значение случайной величины, распределенной по закону χ^2 с $K = m - 1$ степенями свободы.

Вероятности p_k попадания случайной величины X в k–ый интервал $[\xi_{k-1}; \xi_k]$ разбиения отрезка $[a; b]$ вычисляются аналитически по формулам (9), (10):

$p_k = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f_X(x)dx$ – если известна плотность распределения $f_X(x)$;

$p_k = F_X(\xi_k) - F_X(\xi_{k-1})$ – если известна функция распределения $F_X(x)$, а ξ_k и ξ_{k-1} – соответственно, верхняя и нижняя границы k–ого интервала разбиения.

Для нормального закона с параметрами (M, σ) вероятности p_k вычисляются по формуле:

$$p_k = \Phi\left(\frac{\xi_k - M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\xi_{k-1} - M}{\sigma}\right), \tag{12}$$

где значения $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ выбираются из таблицы.

в) Сравниваем полученные значения m_X, D_X, σ_X с соответствующими значениями математического ожидания M, дисперсии D и среднеквадратического отклонения σ теоретического закона, которые, в случае необходимости, вычисляются по формулам:

$$M_X = \int_a^b x f_X(x)dx\ , \tag{13}$$

$$D_X = \int_a^b (x-M)^2 f_X(x)dx\,, \tag{14}$$

$$\sigma = \sqrt{D}\,. \tag{15}$$

г) Строим гистограмму частот и гистограмму относительных частот. Для сравнения гистограмму относительных частот размещаем на одном рисунке с графиком плотности распределения заданного теоретического закона. На этом же рисунке отмечаем точками значения M_X и M.

д) По таблице критических точек распределения χ^2 для числа степеней свободы $K = m - 1$ и по найденному значению χ^2_X ищем границы критической области принятия гипотезы о том, что полученные псевдослучайные числа распределены по заданному теоретическому закону, то есть ищем критические точки $\chi^2_{кр}$, для которых выполняется неравенство $\chi^2_X < \chi^2_{кр}$. По наибольшей из этих точек находим количественный показатель «качества» построенного датчика, то есть вероятность P того, что полученные псевдослучайные числа распределены по заданному теоретическому закону, $P = 1 - \alpha$, где величина α (уровень значимости) выбирается из соответствующего данной критической точке столбца таблицы.

4. Отладить программу и получить требуемые результаты.

***3.2. Отчет о работе должен содержать*:**

1. Задание на работу с конкретными исходными данными для каждого студента.
2. Сделанные аналитически (вручную) предварительные вычисления необходимые для выполнения задания.
3. Листинг (распечатку) программы на языке программирования.
4. Первые 10 чисел, полученных с помощью датчика псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0; 1], а также первы 10 чисел, полученных с помощью датчика псевдослучайных чисел заданной плотностью распределения $f_X(x)$ на отрезке $[a; b]$.
5. Листинг результатов работы программы для объема выборк $n = 1000$ и числа разбиений отрезка $[a; b]$ на $m = 10$ интервалов.
6. Гистограмму относительных частот для $m = 10$ и $n = 1000$ с нанесенным на нее графиком плотности распределения заданной случайной величины.

Пример программы на *PASCALе* и результаты ее работы представлены ниже.

ЗАДАНИЕ: Получить последовательность псевдослучайных чисел, распределенных на отрезке $[a;\ b]$ с плотностью распределения $f_X(x)$, представленной на рис. 4. Найти числовые характеристики полученной случайной последовательности (выборки). Сравнить полученные числовые характеристики с соответствующими характеристиками заданного теоретического закона. Построить гистограмму относительных частот для $m = 10$ и $n = 1000$ и график плотности распределения заданной случайной величины. Оценить степень согласованности статистического и теоретического распределений с помощью критерия χ^2 (критерия Пирсона).

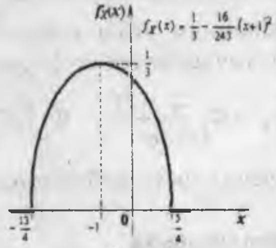

Рис. 4

Выполним предварительные вычисления.

Из рис. 4 видно, что данная случайная величина задана на отрезке $\left[-\frac{13}{4}; \frac{5}{4}\right] = [-3.25; 1.25]$, а плотность распределения $f_X(x)$ имеет вид:

$$f_X(x) = \frac{1}{3} - \frac{16}{243}(x+1)^2 .$$

Максимальное значение $f_{\max}$ функции $f_X(x)$ достигается в точке $x = -1$:

$$\max_{-13/4 \le x \le 5/4} f_X(x) = f_{\max} = \frac{1}{3} .$$

Вычислим математическое ожидание M, дисперсию D и среднеквадратическое отклонение σ данной случайной величины по формулам (13)–(15).

$$M = \int_a^b x f_X(x)dx = \int_{-13/4}^{5/4} x\left(\frac{1}{3} - \frac{16}{243}(x+1)^2\right)dx = -1 \text{ (видно из рис. 4).}$$

$$D = \int_a^b (x-M)^2 f_X(x)dx = \int_{-13/4}^{5/4} (x+1)^2\left(\frac{1}{3} - \frac{16}{243}(x+1)^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-13/4}^{5/4}(x+1)^2 dx - \frac{16}{243}\int_{-13/4}^{5/4}(x+1)^4 dx = 1.0125.$$

$$\sigma = \sqrt{D} \approx 1.0062.$$

Для того, чтобы не вычислять вручную вероятности p_k попадания случайной величины X в k–ый интервал разбиения отрезка $[a;\ b]$, воспользуемся вычислительными возможностями *ПЭВМ*. Мы знаем, что вероятности p_k вычисляются по формулам (9), (10):

$$p_k = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f_X(x)dx = F_X(\xi_k) - F_X(\xi_{k-1}),$$

где $F'_X(x) = f_X(x)$.

Описанная в программе функция $F_X(x)$ (функция *Raspredelenie*) позволяет вычислить вероятность попадания случайной величины X в k-ый интервал разбиения отрезка $[a; b]$ одним оператором $p_k = F_X(\xi_k) - F_X(\xi_{k-1})$.

Напомним, что для нормального закона с параметрами M и σ вероятности p_k вычисляются по формуле (12):

$$p_k = \Phi\left(\frac{\xi_k - M}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\xi_{k-1} - M}{\sigma}\right),$$

а значения $\Phi(x)$ выбираются из таблицы.

```
Program Obrabotka;
{ датчики псевдослучайных чисел; обработка результатов наблюдений }
var
  R, a, b, fm, s1, s2, d, L, m_ksi, d_ksi, sigma_ksi, z, z1, xi2  : real;
  i, n, m, k                                                      : integer;
  ksi                                                             : array [1..1000] of real;
  gr                                                              : array [0..10] of real;
{ границы интервалов разбиения отрезка [a; b] }
  v                                                               : array [1..10] of integer;
{ массив частот }
  w                                                               : array [1..10] of real;
{ массив относительных частот }
  p                                                               : array [1..10] of real;
{ массив вероятностей }
  gi                                                              : array [1..10] of real;
{ гистограмма относительных частот }
Function Plotnost (x: real): real; { плотность распределения }
  begin
    Plotnost := 1/3 - (16/243)*(x + 1)*(x + 1);
  end;
Function Raspredelenie (x: real): real; { функция распределения }
  begin
    Raspredelenie := (1/3)*x - 16/(3*243)*(x + 1)*(x + 1)*(x + 1);
  end;
Function Trebyemaya (a, b: real): real;
{ датчик псевдослучайных чисел с заданной плотностью распределения на отрезке [a; b] }
var

  x1, y1, x2, y2: real;
begin
  y1 := Random;
  y2 := 0;
```

```
  while y2 = 0 do
   begin
    x1 := y1;
    y1 := Random;
    x2 := a + x1*(b - a);
    if y1 <= Plotnost(x2)/fm then y2 := x2;
   end;
  Trebyemaya := y2;
end;

BEGIN
   writeln ('':20, 'Л А Б О Р А Т О Р Н А Я     Р А Б О Т А');
   writeln ('':13, 'Тема: Датчики псевдослучайных чисел.');
   writeln ('':13, 'Статистическая обработка наблюдений');
   writeln ('Выполнил студент группы СЖД-221 Иванов Иван');
   writeln;
   writeln ('Введите исходные данные (a, b, fm):'); { [a; b]; fm = f_max }
   readln (a, b, fm ); { a = –13/4; b = 5/4; fm = 1/3 }
   writeln;
   Randomize;
   writeln;
   writeln ('':20, 'Р Е З У Л Ь Т А Т Ы');
   writeln;
   n := 1000;
   m := 10;
   writeln ('  Псевдослучайные числа, равномерно распределенные на отрезке [0; 1]:');
   for i := 1 to 10 do
    write (Random:5:2, ', ');
   writeln ('. . .' );
   writeln ('  Случайные числа, распределенные на отрезке [0; 1] по заданному закону:');
   for i := 1 to n do
    ksi[i] := Trebyemaya (a, b);
   for i := 1 to 10 do
    write (ksi[i]:5:2, ', ');
   writeln ('. . . ');

   { Расчет числовых характеристик выборки }
   R := b - a ; { Размах выборки }
   L := R / m; { Длина интервалов разбиения отрезка [a; b] }
   gr[0] := a;
   for i := 1 to m do
    begin
     gr[i] := gr[i-1] + L;
     v[i] := 0;
    end;
   for i := 1 to m do
    p[i] := Raspredelenie(gr[i]) - Raspredelenie(gr[i-1]);
   s1 := 0;
   s2 := 0;
   for i := 1 to n do
```

```
  begin
    d := ksi[i];
    s1 := s1 + d;
    s2 := s2 + Sqr(d);
    for k := 1 to m do
      if (d > gr [k-1]) and (d <= gr[k]) then v[k] := v[k] + 1;
  end;
 m_ksi := s1/n; { Выборочное математическое ожидание }
 d_ksi := (s2 - n*Sqr(m_ksi))/(n - 1); { Выборочная дисперсия }
 sigma_ksi := Sqrt(d_ksi); { Выборочное среднеквадратическое отклонение }
 z := 0;
 for k := 1 to m do
  begin
    w[k] := v[k]/n;
    gi[k] := w[k]/L;
    z1 := n*p[k];
    z := z + Sqr(v[k] - z1)/z1;
  end;
 xi2 := z;
 writeln;
 writeln ('  Мат. ожид.  :  выборочное  Mx =', m_ksi:7:4, ';  теоретическое  M = -1');
 writeln ('  Дисперсия  :  выборочная  Dx =', d_ksi:7:4, ';  теоретическое  D =  1.0125');
 writeln ('  Ср. кв. откл.: выборочное  Sx =', sigma_ksi:7:4, ';  теоретическое  S =  1.0062');
 writeln;
 writeln ('':20, 'Частоты. Теоретические вероятности');
 write ('':6);
 for k := 1 to m do
   write (k:7);
 writeln;
 write ('v[k] :');
 for k := 1 to m do
   write (v[k]:7);
 writeln;
 write ('w[k] :');
 for k := 1 to m do
   write (w[k]:7:2);
 writeln;
 write ('p[k] :');
 for k := 1 to m do
   write (p[k]:7:2);
 writeln;
 write ('gi[k]:');
 for k := 1 to m do
   write (gi[k]:7:2);
 writeln;
 writeln;
 writeln ('  Хи-квадрат статистика X2 = ', xi2:6:2);
 writeln ('  Число степеней свободы K = ' , (m-1));
 readln;
END.
```

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Тема: Датчики псевдослучайных чисел.

Статистическая обработка наблюдений

Выполнил студент группы СЖД-221 Иванов Иван

Введите исходные данные (a, b, fm):

-3.25

1.25

0.33

РЕЗУЛЬТАТЫ

Псевдослучайные числа, равномерно распределенные на отрезке [0; 1]:

0.88, 0.50, 0.72, 0.17, 0.05, 0.96, 0.42, 0.45, 0.19, 0.13, . . .

Случайные числа, распределенные на отрезке [0; 1] по заданному закону:

-0.46, -1.64, 0.46, -2.22, -0.36, -1.07, -0.39, -1.44, 0.22, 0.99, . . .

Мат. ожид. : выборочное Mx =-0.838; теоретическое M = -1

Дисперсия : выборочная Dx = 0.985; теоретическая D = 1.0125

Ср. кв. откл.: выборочное Sx = 0.993; теоретическое S = 1.0062

Частоты. Теоретические вероятности

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v[k] :	25	53	85	126	140	162	146	136	94	33
w[k] :	0.03	0.05	0.09	0.13	0.14	0.16	0.15	0.14	0.09	0.03
p[k] :	0.03	0.08	0.11	0.14	0.15	0.15	0.14	0.11	0.08	0.03
gi[k] :	0.06	0.12	0.19	0.28	0.31	0.36	0.32	0.30	0.21	0.07

Хи-квадрат статистика X2 = 27.32

Число степеней свободы K = 9

Замечание. При каждом запуске программы результаты будут иными, так как процедура–функция *Random* в совокупности с процедурой *Randomize* каждый раз генерирует новый набор случайных чисел.

По таблице критических точек распределения χ^2 для числа степеней свободы $K = 9$ и по найденному значению $\chi^2_X = 27.32$ находим наименьшую критическую точку $\chi^2_{кр}$, для которой выполнено неравенство $27.32 < \chi^2_{кр}$: $\chi^2_{кр} = 27.9$. Из этой же таблицы (по столбцу, где находится $\chi^2_{кр}$) находим значение $\alpha = 0.001$ – это и есть уровень значимости, то есть вероятность совершить ошибку, предположив, что полученные нами псевдослучайные числа распределены по заданному закону.

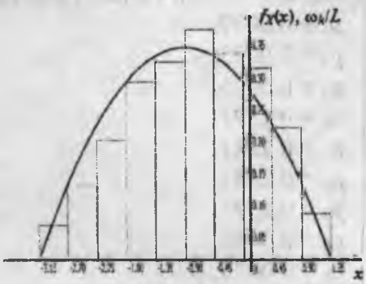

Рис. 5

Гистограмма относительных частот вместе с графиком плотности распределения представлены на рис. 5.

Для получения псевдослучайных чисел, распределенных по нормальному закону с параметрами $M = mo$ и $\sigma = sko$, функции *Plotnost* и *Trebyemaya* будут иметь следующий вид.

```
Function Plotnost (x, mo, sko: real): real;
 begin
  Plotnost := exp(-Sqr(x-mo)/(2*Sqr(sko)))/(sko*sqrt(2*pi));
 end;
Function Trebyemaya (a, b, mo, sko: real): real;
var
 x1, y1, x2, y2: real;
begin
 y1 := Random;
 y2 := 0;
 while y2 = 0 do
  begin
   x1 := y1;
   y1 := Random;
   x2 := a + x1*(b - a);
   if y1 <= Plotnost(x2, mo, sko)/fm then y2 := x2;
  end;
 Trebyemaya := y2;
end;
```

Введем следующие исходные данные: $a = -4$, $b = 4$, $f_{\max} = fm = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx$ ≈ 0.3989, $M = mo = 0$, $\sigma = \text{sko} = 1$, $m = 10$, $n = 1000$. Вероятности p_k предварительно вычислим аналитически (вручную) по формуле (12):

$p_1 = 0.0007$,
$p_2 = 0.0075$,
$p_3 = 0.0466$,
$p_4 = 0.1571$,
$p_5 = 0.2881$,
$p_6 = 0.2881$,
$p_7 = 0.1571$,
$p_8 = 0.0466$,
$p_9 = 0.0075$,
$p_{10} = 0.0007$.

Тогда результаты работы программы могут быть следующими.

Введите исходные данные (a, b, fm, mo, sko):
-4
4
0.3989
0
1

Р Е З У Л Ь Т А Т Ы

Случайные числа, распределенные по нормальному закону N(0; 1):
0.73, -0.30, -0.05, -1.42, 1.30, -1.46, 1.02, -0.37, -0.08, 0.69, . . .

Мат. ожид. : выборочное Mx = 0.111; теоретическое M = 0
Дисперсия : выборочная Dx = 0.999; теоретическая D = 1
Ср. кв откл.: выборочное Sx = 1.000; теоретическое S = 1

Частоты. Теоретические вероятности

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v[k] :	1	6	32	151	251	315	171	65	7	1
w[k] :	0.00	0.01	0.03	0.15	0.25	0.32	0.17	0.07	0.01	0.00
p[k] :	0.00	0.01	0.05	0.16	0.29	0.29	0.16	0.05	0.01	0.00
gi[k] :	0.00	0.01	0.04	0.19	0.31	0.39	0.21	0.08	0.01	0.00

Хи-квадрат статистика X2 = 21.19
Число степеней свободы K = 9

Если в задании требуется построить датчик псевдослучайных чисел, распределенных по нормальному закону с параметрами $M = mo$ и $\sigma = sko$, методом суммирования, то функция *Plotnost* не описывается, а функция *Trebyemaya* может иметь следующий вид.

```
Function Trebyemaya (mo, sko: real): real;
var
 x1, y1: real;
 begin
  x1 := 0;
  y1 := sqrt(10);
  for k := 1 to 10 do
   x1 := x1 + Random;
  Trebyemaya := (2*x1/y1 - y1)*sko*sqrt(3) + mo;
end;
```

В этом случае результаты работы программы могут быть следующими.

Введите исходные данные (a, b, mo, sko):
-4
4
0
1

Р Е З У Л Ь Т А Т Ы

Случайные числа, распределенные по нормальному закону N(0; 1):
-0.50, 0.41, -1.39, 0.70, -0.30, 0.67, -1.10, 1.85, 0.10, 1.36, . . .

Мат. ожид. : выборочное Mx = 0.000; теоретическое M = 0
Дисперсия : выборочная Dx = 0.992; теоретическая D = 1
Ср. кв. откл.: выборочное Sx = 0.996; теоретическое S = 1

Частоты. Теоретические вероятности

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v[k]	:	1	3	60	141	290	291	161	48	4	1
w[k]	:	0.00	0.00	0.06	0.14	0.29	0.29	0.16	0.05	0.00	0.00
p[k]	:	0.00	0.01	0.05	0.16	0.29	0.29	0.16	0.05	0.01	0.00
gi[k]	:	0.00	0.00	0.07	0.18	0.36	0.36	0.20	0.06	0.00	0.00

Хи-квадрат статистика X2 = 10.27
Число степеней свободы K = 9

Замечания.

1. Обратить внимание на соответствие формальных и фактических параметров в описанных выше функциях при обращении к ним из программы.
2. Область возможных значений случайной величины X, полученной методом суммирования, такова: $-\sqrt{30}\sigma + M < x < \sqrt{30}\sigma + M$.

3.3. Варианты заданий.

1. $f_X(x) = \begin{cases} 1/5, & -2 \le x \le 3, \\ 0, & x < -2,\ x > 3. \end{cases}$

2. $f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & 1 \le x \le 3, \\ 0, & x < 1,\ x > 3. \end{cases}$

3. $f_X(x) = \begin{cases} 1/4, & -3 \le x \le 1, \\ 0, & x < -3,\ x > 1. \end{cases}$

4. $f_X(x) = \begin{cases} 0.125(x-1), & 1 \le x \le 5, \\ 0, & x < 1,\ x > 5. \end{cases}$

5. $f_X(x) = \begin{cases} 0.5(x-5), & 5 \le x \le 7, \\ 0, & x < 5,\ x > 7. \end{cases}$

6. $f_X(x) = \begin{cases} 8(x+3), & -3 \le x \le 3.5, \\ 0, & x < -3,\ x > 3.5. \end{cases}$

7. $f_X(x)=\begin{cases}0.25, & -1\le x\le 0,\\ 0.125(x+2), & 0\le x\le 2,\\ 0, & x<-1,\ x>2.\end{cases}$

8. $f_X(x)=\begin{cases}0.125(2-x), & -2\le x\le 0,\\ 0.25, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x<-2,\ x>1.\end{cases}$

9. $f_X(x)=\begin{cases}0.25, & 0\le x\le 1,\\ 0.125(x+1), & 1\le x\le 3,\\ 0, & x<0,\ x>3.\end{cases}$

10. $f_X(x)=\begin{cases}(1-x)/4, & -3\le x\le -1,\\ 0.25, & -1\le x\le 0,\\ 0, & x<-3,\ x>0.\end{cases}$

11. $f_X(x)=\begin{cases}(x+3)/6, & -3\le x\le 0,\\ 0.25, & 0\le x\le 0.5,\\ 0, & x<-3,\ x>0.5.\end{cases}$

12. $f_X(x)=\begin{cases}(x+1)/6, & -1\le x\le 2,\\ 0.25, & 2\le x\le 2.5,\\ 0, & x<-1,\ x>2.5.\end{cases}$

13. $f_X(x)=\begin{cases}3/4, & -1\le x\le -1/3,\\ 3(2-x)/8, & -1/3\le x\le 0,\\ 0, & x<-1,\ x>0.\end{cases}$

14. $f_X(x)=\begin{cases}3x/8, & 0\le x\le 2,\\ 0.25, & 2\le x\le 7/3,\\ 0, & x<0,\ x>7/3.\end{cases}$

15. $f_X(x)=\begin{cases}16x, & 0\le x\le 1/4,\\ 8(1-2x), & 1/4\le x\le 1/2,\\ 0, & x<0,\ x>1/2.\end{cases}$

16. $f_X(x)=\begin{cases}4x+2, & -1/2\le x\le 0,\\ 2(1-2x), & 0\le x\le 1/2,\\ 0, & x<-1/2,\ x>1/2.\end{cases}$

17. $f_X(x)=\begin{cases}x-1, & 1\le x\le 2,\\ 3-x, & 2\le x\le 3,\\ 0, & x<1,\ x>3.\end{cases}$

18. $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1/2,\\ 1-2x, & 1/2\le x\le 1,\\ 0, & x<0,\ x>1.\end{cases}$

19. $f_X(x)=\begin{cases}1/3-16(x-1)^2/243, & -5/4\le x\le 13/4,\\ 0, & x<-5/4,\ x>13/4.\end{cases}$

20. $f_X(x)=\begin{cases}3(1-x^2)/4, & -1\le x\le 1,\\ 0, & x<-1,\ x>1.\end{cases}$

21. $f_X(x)=\begin{cases}3x(2-x)/4, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x<0,\ x>2.\end{cases}$

22. $f_X(x)=\begin{cases}3x^2/2, & -1\le x\le 1,\\ 0, & x<-1,\ x>1.\end{cases}$

23. $f_X(x)=\begin{cases}3(x-2)^2, & 1\le x\le 3,\\ 0, & x<1,\ x>3.\end{cases}$

24. $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, & -4\le x\le 4,\\ 0, & x<-4,\ x>4.\end{cases}$

25. $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/8}, & -9\le x\le 11,\\ 0, & x<-9,\ x>11.\end{cases}$

26. $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-2)^2/2}, & -3\le x\le 7,\\ 0, & x<-3,\ x>7.\end{cases}$

Замечание. Варианты 24, 25, 26 выполнить методом суммирования.

4. Лабораторная работа № 3
РЕШЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ МОНТЕ–КАРЛО

Данная работа является адаптацией лабораторной работы «Нахождение вероятности случайного события с помощью метода статистического моделирования» (В.Е. Вечтомов, Г.Ф. Канаева, Р.П. Левина, А.В. Марченко, В.Б. Минасян, Москва, МИИТ, 1988) для групп строительных и других специальностей, изучающих в курсе информатики язык программирования *PASCAL*.

4.1. Задание на лабораторную работу. Решить аналитически и численно (методом статистических испытаний) предложенную задачу. Сравнить полученные результаты.

Для выполнения задания необходимо:

1. Изучить данные методические указания в необходимом для проведения лабораторной работы объеме.
2. Получить у преподавателя исходные данные для своего варианта работы.
3. Решить задачу аналитически.
4. Написать программу реализации задания на знакомом (и доступном для рабочей *ПЭВМ*) языке программирования, предварительно разработав алгоритм решения задачи (для отчета не представляется).

Описательно алгоритм состоит в следующем.

а) Строим модель описанного в задаче процесса в виде логических выражений (записанных с помощью неравенств и логических операций или с помощью условного оператора), удовлетворяющих событию, вероятность которого необходимо вычислить.

б) С помощью имеющегося в библиотеке *ПЭВМ* датчика случайных чисел (в *PASCAL*е – процедуры *Randomize*, *Random*) в цикле выполняем N реализаций процесса, и каждый раз проверяем, удовлетворяются ли условия события, вероятность которого вычисляется. Если для какой-то очередной реализации условия интересующего нас события выполнены (логическое выражение истинно), то счетчик числа благоприятных исходов увеличиваем на единицу.

в) Вычисляем вероятность $P(A)$ интересующего нас события:

$P(A) \approx \frac{n}{N}$, где N – общее число реализаций модели, а n – число благоприятных исходов.

5. Отладить программу и получить требуемые результаты.

***4.2. Отчет о работе должен содержать*:**

1. Задание на работу с конкретными исходными данными для каждого студента.
2. Аналитическое решение задачи.
3. Листинг (распечатку) программы на языке программирования.
4. Листинг результатов работы программы.

Пример выполнения лабораторной работы с программой на *PASCAL*е и результатами ее работы представлен ниже.

ЗАДАНИЕ: Стрелка прибора скачет влево – вправо. Она может свободно перемещаться по шкале от начального положения в любую сторону. Вероятность p движения вправо равна $p = 0.6$; вероятность q движения влево равна $q = 1 - p = 0.4$. Каждое случайное движение означает передвижение стрелки на одно деление. Найти вероятность того, что в результате пяти случайных движений стрелка будет отклонена вправо не менее, чем на два деления.

РЕШЕНИЕ: Положение стрелки на шкале будем обозначать через c_i, $i = -5, -4, \ldots, 4, 5$. Движение стрелки укладывается в схему испытаний Бернулли. После пяти случайных движений стрелка может оказаться только в положениях с нечетными номерами. Интересующее нас событие A состоит в следующем: стрелка после пяти движений оказалась в положении c_3 (событие B) или c_5 (событие C). Вероятность события B (4 движения вправо, 1 движение влево) равна $p(B) = C_5^4 p^4 q^1 = 5 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4 = 0.2592$. Вероятность события C (5 движений вправо, ни одного движения влево) равна $p(C) = p^5 = 0.6^5 \approx 0.0778$. По теореме сложения вероятностей $P(A) = P(B) + P(C) = 0.2592 + 0.0778 \approx 0.3370$.

```
Program PROBABILITY; { решение задач методом Монте–Карло }
var
  p, p1            : real;
  i, j, s, m, n, k: integer;
BEGIN
   Randomize; { инициализация датчика случайных чисел }
   writeln ('':20, 'Л А Б О Р А Т О Р Н А Я     Р А Б О Т А');
   writeln ('':13, 'Тема: Решение задач методом Монте–Карло');
   writeln ('Выполнил студент группы СЖД-221 Иванов Иван');
   writeln;
   write ('Введите исходные данные (p): ');
```

```
  readln (p); { p = 0.6 }
  writeln;
  writeln ('':20, 'Р Е З У Л Ь Т А Т Ы');
  writeln;
  writeln ('':5, 'N', '':10, 'n', '':10, 'Вероятность');
  for i := 1 to 5 do
   begin
     n := i*i*i*20;
     k := 0;
     for j := 1 to n do
       begin
         m := 0;
         for s := 1 to 5 do
           if Random <= p then m := m + 1 else m := m - 1;
         if  m >= 2 then k := k + 1;
       end;
     p1 := k/n;
     writeln (n:6, k:11, p1:21:3 );
   end;
  readln;
END.
```

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я   Р А Б О Т А

Тема: Решение задач методом Монте–Карло

Выполнил студент группы СЖД-221 Иванов Иван

Введите исходные данные (p): 0.6

Р Е З У Л Ь Т А Т Ы

N	n	вероятность
20	4	0.200
160	58	0.363
540	180	0.333
1280	435	0.340
2500	843	0.337

<u>*Замечание*</u>. При каждом запуске программы результаты, выводимые во втором и третьем столбцах таблицы, будут иными, так как процедура–функция *Random* в совокупности с процедурой *Randomize* каждый раз генерирует новый набор случайных чисел.

4.3. Варианты заданий.

1. В урне находятся 5 белых и 4 черных шара, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимаю два шара. Найти вероятность того, что оба шара – белые.
2. В коробке лежат 5 синих, 4 красных и 3 зеленых карандаша. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какова вероятность того, что среди них – два синих и один зеленый карандаш?
3. Дано 6 карточек с буквами *Н*, *М*, *И*, *Я*, *Л*, *О*. Найти вероятность того, что получится слово *ЛОМ*, если наугад одна за другой выбирают три карточки.
4. Восемь друзей распределяют места за круглым столом по жребию. Какова вероятность того, что два друга, а именно, A и B, будут сидеть рядом?
5. Три человека произвольно размещаются в восьми вагонах электрички. Какова вероятность того, что все они зайдут в вагон №3?
6. На отрезок AB длины a наудачу нанесена точка C. Найти вероятность того, что меньший из отрезков – AC или CB – будет иметь длину, большую $a/6$.
7. Противник в течение часа делает один десятиминутный налет на участок шоссе. В течение этого же часа нужно преодолеть этот участок шоссе. С какой вероятностью можно избежать налета, если время преодоления опасного участка занимает 5 минут?
8. Какова вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ будут действительными, если значения коэффициентов p и q уравнения выбираются наудачу на отрезке $[0;1]$?
9. Вы забыли последнюю цифру номера телефона и набираете ее наудачу. Найти вероятность того, что вам придется звонить не более чем в три места.
10. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0.8, для второго – 0.75, для третьего – 0.7. Какова вероятность хотя бы одного попадания в цель?
11. Литье в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 70% – из первого цеха и 30% – из второго. При этом материал первого цеха имеет 10% брака, а второго – 20% брака. Найти вероятность того, что одна взятая наугад болванка не имеет дефектов.

12. По самолету производится три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.5, при втором – 0.6, при третьем – 0.8. При одном попадании самолет будет сбит с вероятностью 0.3, при двух – с вероятностью 0.6, а при трех самолет будет сбит наверняка. Какова вероятность того, что самолет будет сбит?

13. Истребитель атакует бомбардировщик, делает один выстрел и сбивает бомбардировщик с вероятностью 0.3. Если этим выстрелом истребителя бомбардировщик не сбит, то он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью 0.15. Если выстрелом бомбардировщика истребитель не сбит, то он стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью 0.5. Найти вероятность того, что в этом бою будет сбит бомбардировщик.

14. Истребитель атакует бомбардировщик, делает один выстрел и сбивает бомбардировщик с вероятностью 0.3. Если этим выстрелом истребителя бомбардировщик не сбит, то он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью 0.15. Если выстрелом бомбардировщика истребитель не сбит, то он стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью 0.5. Найти вероятность того, что в этом бою будет сбит истребитель.

15. Истребитель атакует бомбардировщик, делает один выстрел и сбивает бомбардировщик с вероятностью 0.3. Если этим выстрелом истребителя бомбардировщик не сбит, то он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью 0.15. Если выстрелом бомбардировщика истребитель не сбит, то он стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью 0.5. Найти вероятность того, что в этом бою будет сбит хотя бы один самолет.

16. Фабрика выпускает 75% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что из 300 изделий число первосортных будет заключено между 219 и 234?

17. Монету бросают 400 раз. Какова вероятность того, что герб при этом выпадет не менее 196 раз, но не более 206 раз?

18. Игральную кость бросают 500 раз. Какова вероятность того, что одно очко при этом выпадет не менее 76 раз, но не более 90 раз?

19. Пусть всхожесть ржи составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдут 5?

20. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника три партии из четырех или пять партий из восьми (ничейный результат исключается)?

21. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми (ничейный результат исключается)?

22. В приборе стоят 6 одинаковых предохранителей. Для каждого из них вероятность перегореть после 1000 часов работы равна 0.4. Если перегорело не менее двух предохранителей, то прибор требует ремонта. Найти вероятность того, что прибор потребует ремонта после 1000 часов работы, если предохранители перегорают независимо друг от друга?

23. В ящике лежат несколько тысяч предохранителей. Половина из них изготовлена заводом №1, остальные – заводом №2. Наудачу вынули пять предохранителей. Чему равна вероятность того, что более двух из них изготовлено заводом №1?

24. 40% шестерен, лежащих в ящике, изготовлено на заводе №1, остальные – на заводе №2. Из ящика взяли наудачу семь шестерен. Какова вероятность того, что менее трех из них изготовлено заводом №1?

25. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар – красный, если известно, что синий шар не вынут?

26. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба они – зеленые, если известно, что синий шар не вынут?

27. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что эти шары – разного цвета, если известно, что синий шар не вынут?

28. Часы изготавливаются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 40% продукции, второй – 45%, третий – 15%. Среди продукции первого завода спешат 80% часов, второго – 70%, третьего – 90%. Какова вероятность того, что купленные часы спешат?

Виктор Дмитриевич Жук
Надежда Борисовна Логинова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к лабораторным работам
по дисциплине
«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

ано к печати - 11.12.06.
- 60×84/16 Усл.-печ. л. - 2,5. Тираж - 100.
4–06 Заказ № 555.

127994, г. Москва, ул. Образцова, 15