МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Вычислительная математика»

Г.В.Черников

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Рекомендовано
редакционно-издательским советом университета в качестве
методических указаний к практическим занятиям по математике
для студентов 1-го курса всех специальностей ИПСС.

Москва – 2008

УДК 517.77

Ч 49

Черников Г.В. Неопределенный интеграл. Методические указания к практическим занятиям по математике для студентов 1-го курса всех специальностей ИПСС. – М.: МИИТ, 2008. – 24 с.

Представлены основы теории и рассмотрены основные приемы вычисления неопределенного интеграла. Материал проиллюстрирован подробно разобранными примерами так, чтобы изучив материал, студент мог самостоятельно решать предлагаемые в курсе задачи.

## I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Интегрирование – математическая операция, обратная дифференцированию. Например, две функции: $f(x) = 3x^2$ и $F(x) = x^3$ связаны между собой, причем функция $f(x)$ является производной от $F(x)$; при этом саму $F(x)$ называют первообразной по отношению к $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если выполняется:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}.$$

Для любой непрерывной функции $f(x)$, всегда существует первообразная $F(x)$, которую отыскать, вообще говоря, непросто. Даже если $f(x)$ является элементарной функцией, ее первообразная не обязана быть таковой[1]. Однако, для основных элементарных функций их первообразные хорошо известны.

При работе с первообразными естественно отталкиваться от обратной операции – дифференцирования. Так, опираясь на основные свойства производных, несложно доказать основные СВОЙСТВА ПЕРВООБРАЗНЫХ:

1. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то и $F(x)+C$ (где: $C$ - константа – любое число) также будет первообразной для $f(x)$.

*Доказательство.* Т.к $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$; поэтому
$(F(x)+C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$ (т.к. производная константы $C$ равна 0).

---

[1] иными словами: может оказаться так, что хотя первообразная и существует, но ее нельзя записать одной формулой «конечной длины»

2. Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – для $g(x)$, то первообразная суммы (или разности) двух функций: $f(x) \pm g(x)$ – будет суммой (или разностью) их первообразных $F(x) \pm G(x)$.

3. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, $\alpha$ – произвольное число. Тогда первообразной для $\alpha f(x)$ будет $\alpha F(x)$.

СВОЙСТВА 2 и 3 можно объединить в одно: первообразной для $\alpha f(x) \pm \beta g(x)$ будет
$\alpha F(x) \pm \beta G(x)$.

*Действительно,*
$(\alpha F(x) \pm \beta G(x))' =( \alpha F(x) )' \pm (\beta G(x))' = \alpha F'(x) \pm \beta G'(x) = \alpha f(x) \pm \beta g(x)$.

Из СВОЙСТВА 1 следует важный вывод: первообразных у функции $f(x)$ – не одна, а бесконечно много! Но все они отличаются друг от друга на константу. Поэтому, достаточно вычислить какую-нибудь одну первообразную $F(x)$, а все остальные получаются простым прибавлением констант. Например, для рассмотренной выше функции $f(x) = 3x^2$ можно указать такие ее первообразные: $F(x) = x^3$ ( т.е. $F(x) = x^3+0$ ), $F(x) = x^3 - \frac{3}{5}$, $F(x) = x^3+10$ и т.д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, называется <u>неопределенный интеграл</u>. Его обозначают $\int f(x)\,dx$;

Поскольку совокупность всех первообразных это $F(x)+C$, то можно записать[2]:

$$\boxed{\int f(x)\,dx \equiv F(x)+C}$$

---

[2] Знак " ≡ " заменяет слова «по определению».

Из рассмотренных выше определения и свойств первообразыных следуют основные ПРАВИЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ:

I. $$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

( или: $d\int f(x)dx = f(x)dx$ ));

II. $$\int dF(x) = F(x) + C;$$

III. $$\int(\alpha\, f(x) \pm \beta\, g(x))dx = \alpha\int f(x)dx \pm\ \beta\int f(x)dx,$$

где $\alpha$ и $\beta$ – произвольные константы.

ЗАМЕЧАНИЕ.

Поставляя в (II) $x = u(t)$, где $u(t)$ – дифференцируемая функция, получим:

$$d\,F(x) = f(x)\,dx = f(u(t))u'(t)dt, \quad \text{или:}$$

$\mathrm{II}_2$ $$\int f(u(x))u'(x)dt = \int f(u)du = F(u(x)) + C.$$

Особенно важна последняя формула. Она является основой для <u>метода замены переменной</u> – одного из самых эффективных методов вычисления неопределенных интегралов[3].

Действительно, замечая, что $u'(x)dx = du$, мы отказываемся от $x$ и переходим к новой переменной $u$ под знаком интеграла. Иногда приходится проделывать такой ход несколько раз, последовательно вводя новые и новые переменные, так чтобы с каждым шагом интеграл становился все более простым. Естест-

---

[3] Выражение $\mathrm{II}_2$, записанное иначе:

$\int f(u)du = \int f(u(x))u'(x)dt = F(u(x)) + C$, иногда называют правилом *подстановки* в неопределенном интеграле.

венно, при записи окончательного ответа необходимо сделать обратную замену и вернуться к исходной переменной $x$.

## II. Практическое вычисление неопределенного интеграла

При вычислении неопределенных интегралов существенную помощь оказывает использование следующей ТАБЛИЦЫ 1. В ней, собраны неопределенные интегралы некоторых очень часто встречающихся элементарных функций. Обычно в «чистом виде» таблица используется только для решения самых простых задач, однако даже «сложные» интегралы, после преобразований, в итоге сводятся к ней.

Рассмотрим подробнее на примерах.

**Пример** 1. Вычислить $\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$.

Раскрывая квадрат под интегралом и применяя формулы 2 и 3 из ТАБЛИЦЫ 1, получим

$$\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int(x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x})dx =$$

$$\int x^2 dx + 2\int x^{1/2} dx + \int\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{2+1}x^{2+1} + 2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot x^{\frac{1}{2}+1} + \ln|x| + C =$$

$\frac{x^3}{3}+\frac{4x^{3/2}}{3}+\ln|x|+C$ (Константы от трех интегралов мы «соединили» в одну – $C$; в дальнейшем мы всегда будем так поступать).

ТАБЛИЦА 1. Неопределенные интегралы некоторых элементарных функций[4].

| | | | |
|---|---|---|---|
| *1* | $\int A dx = Ax + C,$ ($A$-константа) | 8 | $\int tg\, x\, dx = \frac{1}{\cos^2 x} + C$ |
| 2 | $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ $(\alpha \neq -1)$ | 9 | $\int ctg\, x\, dx = -\frac{1}{\sin^2 x} + C$ |
| 3 | $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + C$ | 10 | $\int \frac{dx}{1+x^2} dx = \begin{cases} arctg\, x \\ -arcctg\, x \end{cases} + C$ |
| 4 | $\int a^x dx = a^x \ln a + C,$ $(a>0)$ | 11 | $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases} + C$ |
| 5 | $\int e^x dx = e^x + C$ | 12 | $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C$ |
| 6 | $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ | 13 | $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C$ |
| 7 | $\int \cos x dx = \sin x + C$ | 14 | $\int 0 dx = C$ |

Для решения более сложных примеров потребуется последовательное применение правила $II_2$. Здесь также поможет табли-

[4] Удостовериться в истинности Таблицы 1 не составит труда – достаточно продифференцировать первообразные и сравнить результат с исходной функцией.

ца ТАБЛИЦА 1, однако, для наших целей, лучше переписать ее в терминах дифференциалов.

ТАБЛИЦА 1А. Дифференциалы некоторых основных функций.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$ ( $a$, $b$ –константы) | 8 | $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\, tg\, x$ |
| 2 | $x^\alpha dx = \frac{1}{(\alpha+1)} dx^{\alpha+1}$, $(\alpha \neq -1)$ | 9 | $\frac{dx}{\sin^2 x} = d\, ctg\, x$ |
| 3 | $\frac{dx}{x} = d \ln x$ | 10 | $\frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} d\, arctg\, x \\ -d\, arcctg\, x \end{cases}$ |
| 4 | $a^x dx = \frac{1}{\ln a} da^x$ | 11 | $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} d \arcsin x \\ -d \arccos x \end{cases}$ |
| 5 | $e^x dx = de^x$ | 12 | $sh\, x\, dx = d\, ch\, x$ |
| 6 | $\sin x\, dx = -d \cos x$ | 13 | $ch\, x\, dx = d\, sh\, x$ |
| 7 | $\cos x\, dx = d \sin x$ | 14 | $da = 0$, ( $a$ –константа) |

## ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

**ПРИМЕР 2**. Вычислить $\int \frac{x+10}{x+2} dx$ . Имеем:

$\int \frac{x+2+8}{x+2} dx = \int \left( 1 + \frac{8}{x+2} \right) dx = \int dx + 8 \int \frac{dx}{x+2}$ Первый интеграл по формуле 1 (ТАБ.1). дает: $x$+С. Для вычисления 2-го заметим, что: $dx = d(x+2)$. Далее, обозначив $t = (x+2)$, получим $8\int \frac{d(x+2)}{x+2} = 8\int \frac{dt}{t} = 8 \ln|t| + C = 8 \ln|x+2| + C$. Ответ: $x + 8\ln|x+2| + C$ .

**Пример 3.** Вычислить: $\int\frac{x}{1+16x^4}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x)}{1+(2x)^4}d(2x)\cdot\frac{1}{2}=$

$$=(\tfrac{1}{2})^2\int\frac{(2x)d(2x)}{1+(2x)^4}\overset{\text{Пусть: } t=2x}{=}$$

$$=(\tfrac{1}{2})^2\int\frac{tdt}{1+(t)^4}=(\tfrac{1}{2})^2\int\frac{\frac{1}{2}dt^2}{1+(t)^4}\overset{\text{Пусть: } p=t^2}{=}$$

$$=(\tfrac{1}{2})^3\int\frac{dp}{1+p^2}=\tfrac{1}{8}arctg\,p+C=\tfrac{1}{8}arctg\,(4x^2)+C\,.$$

В этом примере, упрощая интеграл и сводя его к табличному, мы сделали замену дважды. Конечно, при записи окончательного ответа необходимо сделать обратную замену и вернуться к исходной переменной $x$.

**Пример 4.** Вычислить: $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{5-4e^x-e^{2x}}}$. Во-первых, $e^x dx=de^x$; далее, заменяем $e^x$ новой переменной $t$. Получим : $\int\frac{dt}{\sqrt{5-4t-t^2}}$. Теперь выделим полный квадрат под корнем в знаменателе:

$$5-4t-t^2=-(t^2+4t-5)=-(\underline{t^2+2\cdot2\cdot t+2^2}-2^2-5)=$$

$=-\big((t+2)^2-9\big)=9-(t+2)^2$, – мы добавили и отняли $2^2$ так, что подчеркнутое выражение стало полным квадратом. Наш интеграл теперь стал таким:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{9-(t+2)^2}}=\int\frac{d(t+2)}{\sqrt{9-(t+2)^2}}\overset{\text{Замена: } p=t+2}{=}\int\frac{dp}{\sqrt{9-p^2}}=$$

$$\int\frac{d(p/3)\cdot3}{3\sqrt{1-(\frac{p}{3})^2}}\overset{\text{Замена: } s=p/3}{=}$$

$$= \int \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin s + C = \arcsin \tfrac{p}{3} + C = \arcsin \frac{t+2}{3} + C =$$

$$= \arcsin \frac{e^x + 2}{3} + C.$$

Приведем еще несколько формул, полезных при вычислении интегралов:

ТАБЛИЦА 2.

| | |
|---|---|
| 1 | $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$ |
| 2 | $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x-a}{x+a} \right\| + C$ |
| 3 | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ |
| 4 | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \| x + \sqrt{x^2+k} \| + C$ |

Формулы из ТАБЛИЦЫ 2 , за исключением последней, выводятся достаточно легко; проверяются они непосредственным дифференцированием правой части.

Выведем, например, 2-ю: $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)} dx$.

Заметим, что подынтегральное выражение $\dfrac{1}{x^2-a^2}$ – это *правильная рациональная дробь*[5]. Стандартным приемом разложим ее на сумму двух *простых дробей*[6]:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-a)}=\frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x-a)(x+a)}=$$

$=\dfrac{(A+B)x+Aa-Ba}{(x-a)(x+a)}$. Сравнивая числители первой и последней записи в этой цепочке равенств: $\dfrac{0x+1}{(x-a)(x+a)}=$

$=\dfrac{(A+B)x+(Aa-Ba)}{(x-a)(x+a)}$, легко сообразить, что $\begin{cases} A+B=0 \\ Aa-Ba=1 \end{cases}$,

т.е.: $A=1/2a$, $B=-1/2a$.

Тогда: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\left(\int\frac{\frac{1}{2a}}{x-a}-\frac{\frac{1}{2a}}{x+a}\right)dx=$

$$\tfrac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=\tfrac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}-\int\frac{dx}{a\left(\frac{x}{a}+1\right)}\right)=$$

---

[5] Так называются выражения вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где:

$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$,

$Q(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$ – многочлены, причем степень $P(x)$ меньше степени $Q(x)$ (т.е. $n<m$).

[6] Простые дроби это: $\dfrac{1}{(x-a)^k}$ или $\dfrac{1}{(a\,x^2+bx+c)^k}$, где $k$ –целое положительное число.

$$=\frac{1}{2a}\int\frac{d\overbrace{\left(\frac{x}{a}-1\right)}^{\text{Замена: } p=\frac{x}{a}-1}}{\left(\frac{x}{a}-1\right)}-\frac{1}{2a}\int\frac{d\overbrace{\left(\frac{x}{a}+1\right)}^{\text{Замена: } s=\frac{x}{a}+1}}{\left(\frac{x}{a}+1\right)}=\frac{1}{2a}\int\frac{dp}{p}-\frac{1}{2a}\int\frac{ds}{s}=$$

$$\frac{1}{2a}\left(\ln|p|-\ln|s|\right)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{p}{s}\right|+C=$$

$=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$. Что и требовалось получить.

## Интегрирование «по частям».

Одним из важных способов вычисления интегралов является способ *интегрирования «по частям»*. В его основе лежит известная формула дифференциала суммы двух функций: $d(u\cdot v)=u\,dv+v\,du$. Проинтегрировав обе части, получим:

$\int d(u\cdot v)==\int u\,dv+\int v\,du$; или

$$\boxed{\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du}$$

Рассмотрим использование этой формулы на примерах.

**Пример 5**. Вычислить: $\int \ln x\,dx$.

Решение. По формуле интегрирования «по частям»:

$\int \underset{u}{\ln x}\,d\underset{v}{x}==\ln x\cdot x-\int x\,d\ln x=\ldots$ Раскрывая $d\ln x=\dfrac{1}{x}dx$,

получим: $\ldots=x\ln x-\int x\dfrac{1}{x}dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$.

**Пример 6**. Вычислить: $\int x^2\cdot\cos x\,dx$.

Решение. Здесь нам придется применить метод интегрирования «по частям» дважды.

Сначала заметим, что $\cos x\,dx = d\sin x$. Поэтому :

$$\int x^2 \cdot \cos x\,dx = \int \underset{u}{x^2}\, d\underset{v}{\sin x} = = x^2 \sin x - \int \sin x\, dx^2$$

$= x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx = \ldots$ Полученный интеграл, очевидно, проще исходного. С учетом, что: $\sin x\,dx = -d\cos x$, проведем повторное интегрирование «по частям»: $\ldots =$

$$x^2 \sin x + \int \underset{u}{2x}\, d\underset{v}{\cos x} = x^2 \sin x + 2x \cdot \cos x - \int \cos x\, d(2x) =$$

$$x^2 \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\int \cos x\, dx =$$

$$x^2 \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + C.$$

**ПРИМЕР 7**. Вычислить: $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, d\,x$.

Решение: $\int \underset{u}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, d\,\underset{v}{x} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x\, d\sqrt{x^2 + a^2}$

$$= = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx =$$

$$x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \left( \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) dx =$$

$$x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Воспользуемся формулой 4 ТАБ. 2: $a^2 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$

$a^2 \cdot \ln|\, x + \sqrt{x^2 + a^2}\, | + C$. В итоге получилось: $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, d\,x$

$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx + a^2 \ln|\, x + \sqrt{x^2 + a^2}\, | + C.$

Заметим, что в правой части равенства стоит такой же интеграл, как и в левой. Перенесем его в левую часть:

$$2\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

Окончательный ответ:

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C\right).$$

**ПРИМЕР 8**. Вычислить: $\int arctg\sqrt{x}dx$.

Решение: Сделаем замену $\sqrt{x}=t$. Тогда $x=t^2$. Подставляя в интеграл, получим:

$$\int\underbrace{arctgt}_{u}\,d\underbrace{t^2}_{v}=arctg\,t\cdot t^2-\int t^2d\,arctg\,t=\ldots$$ Но

$$d\,arctg\,t=\frac{1}{t^2+1}dt.$$ Тогда:

$$\ldots=arctg\,t\cdot t^2-\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=arctg\,t\cdot t^2-\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$arctg\,t\cdot t^2-\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=arctg\,t\cdot t^2-\int 1dt+\int\frac{1}{t^2+1}dt.$$

Последний интеграл – табличный (см. ТАБ.2 формула 1). В итоге получим: $arctg\,t\cdot t^2-t+arctg\,t+C=$

$$arctg\,t\cdot t^2-t+arctg\,t+C=x\cdot arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}+C.$$

## ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Для вычисления интегралов содержащих тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$
используется *универсальная тригонометрическая подстановка*:

$tg\,\dfrac{x}{2} = t$ (или, $x = 2arctg\,t$). Из нее следуют основные формулы:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ \text{ и }\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}}.$$

**ПРИМЕР 9**. Вычислить $\displaystyle\int\frac{2\cos x\,dx}{\sin^2 x+\cos x+1}$.

Заменим $\sin x$, $\cos x$ *и* $dx$ – их выражениями через $t$, а затем упростим полученное выражение. Имеем:

$$\int\frac{2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=$$

$$=\int\frac{4\cdot\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}+\frac{(1-t^2)(1+t^2)}{(1+t^2)^2}+\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}}\,dt=$$

$$=4\int\frac{1-t^2}{4t^2+(1-t^2)(1+t^2)+(1+t^2)^2}\,dt=$$

$$=4\int\frac{1-t^2}{4t^2+1-t^4+1+2t^2+t^4}\,dt=2\int\frac{-(t^2-1)}{3(t^2+\frac{1}{3})}\,dt=$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{t^2+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}{t^2+\frac{1}{3}}dt=-\frac{2}{3}\left(\int\frac{t^2+\frac{1}{3}}{t^2+\frac{1}{3}}dt-\int\frac{\frac{4}{3}}{t^2+\frac{1}{3}}dt\right)=$$

$$-\frac{2}{3}\left(t-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}}\right)=\ldots$$

Последний интеграл – табличный (см. ТАБ.2):

$$\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{1/3}}arctg\left(\frac{t}{\sqrt{1/3}}\right)+C$$ так, что

получим: $\ldots=-\frac{2t}{3}+\frac{8}{3\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}\,t\right)+C$. Формально подставляя вместо $t$ его значение $tg\,\frac{x}{2}$, запишем окончательный ответ:

$$-\frac{2}{3}tg\,\frac{x}{2}+\frac{8}{3\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}\,tg\,\frac{x}{2}\right)+C.$$

Иногда при вычислении интеграла следует понизить степень $\cos x$ или $\sin x$. Из формулы косинуса двойного угла $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ легко получить следующие формулы:

$$\boxed{\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}}.$$

Также полезна формула: $\boxed{\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x}$.

Заметим, что понижение степени упростит интеграл если в подинтегральном выражении степени синуса и косинуса <u>четные</u>. В этом случае переход от $\sin^n x$ к $\cos^n x$ (и наоборот) удобно выполнять с помощью основного тригонометрического тождества $\sin^2 x+\cos^2 x=1$:

$$\boxed{\sin^n x=(1-\cos^2 x)^{\frac{n}{2}}\ \text{ и }\ \cos^n x=(1-\sin^2 x)^{\frac{n}{2}}}$$

**ПРИМЕР 10.** Вычислить: $\int \cos^2 2x \cdot \sin^4 2x\, dx$. Решение:

$$\int \cos^2 2x \cdot \sin^4 2x\, dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2} \cdot \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \tfrac{1}{8} \int (1 - \cos^2 4x - \cos 4x + \cos^3 4x) dx =$$

$$= \tfrac{1}{8}\left( \int 1 dx - \int \cos^2 4x\, dx + \int \underbrace{(-1+\cos^2 4x)}_{-\sin^2 4x} \underbrace{\cos 4x\, d4x}_{\frac{1}{4} d \sin 4x} \right) =$$

$$= \tfrac{1}{8}\left( x - \int \frac{1+\cos 8x}{2} dx - \tfrac{1}{4} \int \sin^2 4x\ d \overbrace{\sin 4x}^{Замена: \sin 4x = t} \right) =$$

$$= \tfrac{1}{8}\left( x - \int \tfrac{1}{2} dx - \tfrac{1}{2} \int \cos 8x\, d \overbrace{(8x)}^{Замена:\ 8x = s} \cdot \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4} \int t^2 dt \right) =$$

$$= \tfrac{1}{8}\left( x - \frac{x}{2} - \tfrac{1}{16} \int \cos s\, ds - \tfrac{1}{4} \frac{t^3}{3} \right) =$$

$$= \tfrac{1}{8}\left( \frac{x}{2} - \tfrac{1}{16} \sin s - \frac{\sin^3 4x}{12} \right) + C = \frac{x}{16} - \frac{\sin 8x}{128} - \frac{\sin^3 4x}{96} + C$$

Если в подинтегральном выражении присутствуют нечетные степени синуса или косинуса, то целесообразно сначала поступить так: $\sin x\, dx = -d \cos x$ или $\cos x dx = d \sin x$; далее, с помощью основного тригонометрического тождества преобразовать подинтегральное выражение, чтобы в записи присутствовали только синусы или только косинусы, а затем вести новую переменную.

**ПРИМЕР 11.** Вычислить: $\int \cos^4 2x \cdot \sin^3 2x\, dx$ Имеем:

$$\int \cos^4 2x \cdot \sin^3 2x\, d(2x) \tfrac{1}{2} =$$

$$=\frac{1}{2}\int\cos^4 2x\cdot\underbrace{\sin^2 2x}_{1-\cos^2 2x}\cdot\underbrace{\sin 2x\, d(2x)}_{-d\cos 2x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\cos^4 2x\cdot(1-\cos^2 2x)d\overbrace{\cos 2x}^{Замена:\cos 2x=t}=-\frac{1}{2}\int t^4(1-t^2)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(t^4-t^6)dt=-\frac{1}{2}(\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7})+C=\frac{\cos^7 2x}{14}-\frac{\cos^5 2x}{10}+C.$$

При вычислении интегралов, содержащих произведения синусов и косинусов с разными аргументами, можно использовать следующие тригонометрические формулы:

$$\sin a\,\cos b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

$$\cos a\,\cos b=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$

$$\sin a\,\sin b=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$$

**Пример 12.** Вычислить:

$$\int\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\sin\frac{5x}{6}dx+\int\sin\frac{x}{6}dx\right)=$$

$$=-\frac{3}{5}\cos\frac{5x}{6}-3\cos\frac{x}{6}+C.$$

## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

Такого рода подстановки используют для вычисления интегралов содержащих выражения вида: 1) $\sqrt{a^2-x^2}$, 2) $\sqrt{a^2+x^2}$ или 3) $\sqrt{x^2-a^2}$. Для первого типа подстановка: $\boxed{x=a\sin t \text{ или } x=a\sin t}$; для второго: $\boxed{x=a\,\mathrm{tg}\,t \text{ или } x=a\,\mathrm{ctg}\,t}$; для третьсего: $\boxed{x=\dfrac{a}{\cos t} \text{ или } x=\dfrac{a}{\sin t}}$. После соответствующей подстановки интеграл, как правило, существенно упрощается.

**ПРИМЕР 13.** Вычислить: $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$. Применим замену

$x=2\cos t$ (или $\arccos\frac{x}{2}=t$):

$$\int\frac{\sqrt{4-4\cos^2 t}}{4\cos^2 t}d(2\cos t)=\int\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos^2 t}\sin t dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dx=$$

$$\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\cdot dt=\int\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)\cdot dt=$$

$$=\mathrm{tg}\,t-t+C=\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{x}{2}\right)-\arccos\frac{x}{2}+C.$$

## Интегрирование дифференциального бинома

Рассмотрим в общем виде интеграл[7] $\int x^m (a + bx^n)^p dx$,

где <u>числа $m, n$ и $p$</u> – вообще говоря, <u>дроби</u>. Такой интеграл выражается через элементарные функции лишь в <u>трех случаях</u>:

1) $p$ – целое число; следует сделать подстановку: $x = t^k$, где $k$ – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m$ и $n$;

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число; подстановка: $a + bx^n = t^s$, где $s$ –знаменатель дроби $p$;

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое число; подстановка: $\dfrac{a}{x^n} + b = t^s$,

где $s$ –знаменатель дроби $p$.

**Пример 14**. Вычислить $\int \dfrac{dx}{x(\sqrt[3]{x} - 1)^2}$. Имеем:

$\int x^{-1}(x^{\frac{1}{3}} - 1)^{-2} dx$. Здесь $m = -1$, $n = 1/3$ и $p = -2$ – целое число.

Выбираем подстановку (случай 1): $x = t^3$; тогда
$dx = dt^3 = 3t^2 dt$ и интеграл перепишется в виде:

$\int \dfrac{3t^2 dt}{t^3(t-1)^2} = 3\int \dfrac{1}{t(t-1)^2} dt \; 3\int \left( \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{(t-1)} + \dfrac{C}{(t-1)^2} \right) dt$. Мы разложили подинтегральную дробь на сумму простых дробей. Найдем коэффициенты A, B и C.

---

[7] Подинтегральное выражение $x^m (a + bx^n)^p$ называют дифференциальным биномом.

$$\frac{A}{t}+\frac{B}{(t-1)}+\frac{C}{(t-1)^2}=\frac{A(t-1)^2}{t(t-1)^2}+\frac{Bt(t-1)}{t(t-1)^2}+\frac{Ct}{t(t-1)^2}=$$

$$\frac{At^2-2At+A+Bt^2-Bt+Ct}{t(t-1)^2}=$$

$$\frac{t^2(A+B)+t(-2A-B+C)+A}{t(t-1)^2}=\frac{t^2\cdot 0+t\cdot 0+1}{t(t-1)^2}$$. Имеем систему : $\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=0 \\ A=1 \end{cases}$, решив которую получим: A=1, B=-1, C=1. Наш интеграл станет таким:

$$=3\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{(t-1)}+\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt=3\left(\ln|t|-\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}\right)+C=$$

$$=3\left(\ln|\sqrt[3]{x}|-\ln|\sqrt[3]{x}-1|-\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\right)+C.$$

**Пример 15**. Вычислить $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}}dx$. Решение: Перепишем интеграл: $\int x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+1)^{-\frac{1}{3}}dx$; следовательно $m$ = 1/2, $n$ = 1/2 и $p$ = -1/3. $\frac{m+1}{n}$=3 – целое число.

Подстановка (случай 2): $1+x^{\frac{1}{2}}=t^3$ (или $t=\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$); тогда $\sqrt{x}=t^3-1$, $x=(t^3-1)^2$ и $dx=d(t^3-1)^2=6t^2(t^3-1)dt$.

С учетом этого исходный интеграл станет таким:

$$\int \frac{t^3-1}{t}\cdot 6t^2(t^3-1)dt = 6\int t(t^3-1)^2\,dt =$$

$$6\int (t^7-2t^4+t)dt = 6\left(\frac{t^8}{8}-2\frac{t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right)+C =$$

$$= \frac{3(\sqrt{x}+1)^{8/3}}{4} - \frac{12(\sqrt{x}+1)^{5/3}}{5} + 3(\sqrt{x}+1)^{2/3} + C.$$

**Пример 16.** $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{1-x^3}}$. Имеем: $\int x^{-3}(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}dx$; $m = -3$, $n = 3$ и $p = -1/3$. В соответствии со случаем (3): $\frac{m+1}{n}+p = -1$; сделаем подстановку $\frac{1}{x^3}-1=t^3$ ( или: $t=\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}}$ ).

Тогда: $x^{-3}=t^3+1$, $x=(t^3+1)^{-1/3}$, $dx=-(t^3+1)^{-4/3}t^2dt$, и $(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}=\frac{(t^3+1)^{1/3}}{t}$. Имеем:

$$\int (t^3+1)\cdot\frac{(t^3+1)^{1/3}}{t}\cdot\left(-(t^3+1)^{-4/3}t^2dt\right) = -\int (t^3+1)^{1+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}\cdot t\,dt =$$

$$-\int t\,dt = -\frac{t^2}{2}+C =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{1-x^3}{x^3}\right)^2} + C.$$

Оглавление

Учебно-методическое издание

Черников Геннадий Витальевич

Неопределенный интеграл.

Методические указания к практическим занятиям по математике для студентов 1-го курса всех специальностей ИПСС.


Подписано в печать - 12.12.08. Формат 60x84/16
Тираж 100 экз.

Усл-печ. листов - 1,5. Заказ - 578.
Изд. 9-08

127994, Москва, ул. Образцова, 15. Типография МИИТа