

**ФГБ ОУ ВПО «МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ
СООБЩЕНИЯ»**

**Кафедра «Математическое обеспечение
автоматизированных систем управления»**

Т.В. Андреева

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по направлению 230100 «Информатика и вычислительная техника», профиль «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», а также по направлению 231000 «Программная инженерия»

Москва – 2011

УДК 519.6, 519.85

А 32

Андреева Т.В. Вычислительная математика в примерах и задачах: Методические указания к практическим занятиям. — М.: МИИТ. 2011. — 37 с.

В методических указаниях приведены теоретические сведения, необходимые для решения задач по курсу “Вычислительная математика”; приведены примеры, дан разбор задач.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 230100 “Информатика и вычислительная техника”, профиль “Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем”, а также по направлению 231000 “Программная инженерия”.

© ФГБ ОУ ВПО

“Московский государственный
университет путей сообщения”. 2011

1. Введение

1.1. Предмет численных методов

Любую математическую задачу можно сформулировать в виде

$$y = Ax, \quad \text{где } x \in R_1, \quad y \in R_2. \quad A \text{ — оператор.}$$

Точное решение такой задачи не всегда может быть найдено. Численные методы позволяют найти приближенное решение. Суть численного (приближенного) метода состоит в том, что исходной задаче ставится в соответствие задача

$$\bar{y} = \bar{A}\bar{x}, \quad \text{где } \bar{x} \in \bar{R}_1, \quad \bar{y} \in \bar{R}_2. \quad \bar{A} \text{ — оператор.}$$

Эта задача строится таким образом, чтобы ее решение можно было найти элементарными методами, и это решение было *близко* к решению исходной задачи.

1.2. Понятие нормы

Для формализации понятия близости воспользуемся понятием нормы. Линейное пространство L называется *нормированным*, если каждому элементу a этого пространства поставлено в соответствие вещественное число $\|a\|$, называемое *нормой* a , причем выполнены следующие три аксиомы нормы:

- а) $\|a\| \geq 0$ для всех $a \in L$;
- б) $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$, где $a \in L$, $\lambda \in \mathbf{R}$;
- в) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, где $a, b \in L$

(через \mathbf{R} обозначается множество вещественных чисел).

Элементы a и b нормированного пространства считают *близкими*, если величина $\|a - b\|$ мала.

Пример 1.1. В качестве нормы $a \in \mathbf{R}$ можно рассматривать абсолютную величину: $\|a\| = |a|$.

Пример 1.2. Для $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ используют одно из следующих определений нормы:

$$\|a\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|, \quad \|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, \quad \|a\|_c = \max_{i=1, \dots, n} |a_i|.$$

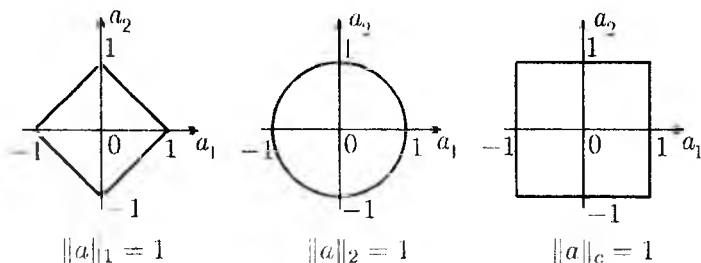
Задача 1.1. Вычислить различные нормы векторов $a = (1, -4)$ и $b = (-3, 3)$.

Решение:

$$\begin{aligned} \|a\|_1 &= |1| + |-4| = 5, & \|b\|_1 &= |-3| + |3| = 6; \\ \|a\|_2 &= \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}, & \|b\|_2 &= \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18}; \\ \|a\|_c &= \max\{|1|, |-4|\} = 4, & \|b\|_c &= \max\{|-3|, |3|\} = 3. \end{aligned}$$

Заметим, что $\|a\|_1 < \|b\|_1$, $\|a\|_2 < \|b\|_2$, $\|a\|_c > \|b\|_c$. ■

Пример 1.3. На рисунке изображены множества точек $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$, удовлетворяющих условию $\|a\| = 1$ для различных норм.



1.3. Погрешность

1.3.1. Абсолютная погрешность

Пусть A — точное значение некоторой величины, a — известное приближение к нему. Принято обозначение $A \approx a$. *Абсолютной погрешностью приближения a* называется величина

$$\Delta = |A - a|.$$

Вычислить приближенное число с *точностью ϵ* значит, что его абсолютная погрешность не должна превышать ϵ . На практике часто пользуются оценками абсолютной погрешности, полученными из теоретических соображений.

Значащими цифрами приближенного числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева. Значащую цифру называют *верной*, если абсолютная погрешность

числа не превышает единицы разряда, соответствующего этой цифре. Излишние сохраненные цифры, помимо верных, называют *сомнительными*.

В промежуточных результатах обычно сохраняют одну–две сомнительные цифры, а окончательный результат округляют с сохранением не более одной сомнительной цифры.

Пример 1.4. Определить верные значащие цифры приближенного числа $x = 83.426$, если абсолютная погрешность равна 0.04.

Решение:

Для цифры 8 единица разряда равна $10 \geq 0.04$. Она верная. Верными являются также цифры 3 и 4. Цифра 2 — сомнительная: $0.01 \leq 0.04$. Следовательно, сомнительной является и цифра 6, стоящая справа от 2. ■

1.3.2. Сходящиеся методы

Численные методы часто зависят от параметров, значения которых стремятся к некоторым предельным величинам.

Метод называется *сходящимся*, если абсолютная погрешность решения, полученного с помощью этого метода, стремится к нулю при стремлении параметра к предельной величине.

Пример 1.5. Метод называется *сходящимся* при $h \rightarrow 0$, если решение для решения $x^{(h)}$, полученного с помощью этого метода, и точного решения x выполнено

$$\|x^{(h)} - x\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Если, сверх того, выполнено неравенство

$$\|x^{(h)} - x\| \leq ch^k,$$

где $c > 0$, $k > 0$ — некоторые константы, то говорят, что имеет место *сходимость порядка h^k* , или что *численный метод имеет k -й порядок точности*.

2. Приближение сеточных функций многочленами

Пусть задано множество аргументов $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Его называют *сеткой*, а числа x_i — *узлами сетки*. Если на некоторой сетке задана таблица значений функции f , то функция f называется *сеточной*. Сеточную функцию f удобно представлять в виде таблицы

x	x_1	x_2	\dots	x_n
f	$f(x_1)$	$f(x_2)$	\dots	$f(x_n)$

поэтому ее еще называют *табличной*.

Задача приближения сеточной функции f многочленом P состоит в том, чтобы построить многочлен заданной степени, *наиболее близкий* к функции f .

Поскольку близость между сеточной функцией и непрерывной функцией, которой является многочлен, не определена, рассматривают сеточную функцию p , заданную следующим образом: $p(x_i) = P(x_i)$, где x_i — узлы сетки. После этого можно считать, что $\|P - f\| = \|p - f\|$.

Если f — сеточная функция, то ее норму можно определить следующим образом:

$$\|f\|_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f(x_i)|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)^2},$$
$$\|f\|_c = \max_{i=1, \dots, n} |f(x_i)|.$$

Нормирующий множитель $\frac{1}{n}$ необходим для того, чтобы норма функции не зависела от количества узлов сетки.

Задача 2.1. Вычислить норму следующей сеточной функции f :

x	1	3	7
f	-2	3	1

Решение:

$$\|f\|_1 = \frac{1}{3}(|-2| + |3| + |1|) = 2,$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{3}((-2)^2 + 3^2 + 1^2)} = \sqrt{\frac{14}{3}} \approx 2.16.$$

$$\|f\|_c = \max\{|-2|, |3|, |1|\} = 3.$$

2.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционным многочленом Лагранжа (ИМЛ) функции f на сетке $\{x_1, \dots, x_n\}$ называется многочлен L , удовлетворяющий условиям

$$L(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е. $\|L - f\| = 0$ для любого определения нормы.

Многочлен степени, не превосходящей m , запишем в виде $L_m(x) = h_0 + h_1x + \dots + h_mx^m$.

Для того, чтобы определить многочлен, необходимо и достаточно определить его коэффициенты h_0, h_1, \dots, h_m . По определению ИМЛ должны выполняться равенства

$$\begin{cases} h_0 + h_1x_1 + \dots + h_mx_1^m = f(x_1), \\ h_0 + h_1x_2 + \dots + h_mx_2^m = f(x_2), \\ \dots \\ h_0 + h_1x_n + \dots + h_mx_n^m = f(x_n). \end{cases} \quad (2.1)$$

Это система n линейных алгебраических уравнений с $m + 1$ неизвестными. Если $n = m + 1$, она имеет единственное решение. Следовательно, на сетке с n узлами ИМЛ имеет степень не выше $n - 1$.

Задача 2.2. Доказать, что при $n = m + 1$ определитель системы (2.1) отличен от нуля.

Пример 2.1. Построить ИМЛ функции f на сетке $\{x_1, x_2\}$.

Решение:

На сетке с двумя узлами найдем многочлен $L_1(x) = h_0 + h_1x$. Составим систему

$$\begin{cases} h_0 + h_1x_1 = f(x_1), \\ h_0 + h_1x_2 = f(x_2), \end{cases}$$

решим ее и получим $L_1(x) = \frac{f(x_1)x_2 - f(x_2)x_1}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}x$. ■

Задача 2.3. Функция f определена на множестве точек $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$ следующим образом: $f(x_i) = \sin x_i$, $i = 1, 2, 3$. Построить для нее ИМЛ.

Решение:

Найдем многочлен $L_2(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2$. Составим систему

$$\begin{cases} h_0 + h_1x_1 + h_2x_1^2 = f(x_1). \\ h_0 + h_1x_2 + h_2x_2^2 = f(x_2). \\ h_0 + h_1x_3 + h_2x_3^2 = f(x_3). \end{cases}$$

Для данной функции она имеет вид

$$\begin{cases} h_0 = 0, \\ h_0 + h_1\frac{\pi}{2} + h_2\frac{\pi^2}{4} = 1, \\ h_0 + h_1\pi + h_2\pi^2 = 0. \end{cases}$$

Ее решением являются $h_0 = 0$, $h_1 = \frac{4}{\pi}$, $h_2 = -\frac{4}{\pi^2}$. Следовательно, $L_2(x) = \frac{4}{\pi}x(1 - \frac{1}{\pi}x)$. ■

Положим $\omega_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$. Можно показать, что на сетке с n узлами

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}$$

На практике встречаются непрерывные на некотором отрезке функции, значения которых сложно вычислять. Это может быть связано, например, со сложным аналитическим выражением функции или с ее неявным заданием. В этом случае можно на рассматриваемом отрезке выбрать некоторую сетку, вычислить значения функции в узлах этой сетки и построить ИМЛ найденной сеточной функции. Построенным многочленом можно пользоваться для приближенного вычисления функции в точках, отличных от узлов сетки.

Для ИМЛ на сетке с n точками и $x \in [a, b]$ имеет место следующая теоретическая оценка абсолютной погрешности:

$$\Delta(x) = |f(x) - L_{n-1}(x)| \leq \max_{t \in [a, b]} |f^{(n)}(t)| \frac{|\omega_n(x)|}{n!}. \quad (2.2)$$

Задача 2.4. Воспользоваться многочленом, построенным в задаче 2.3, для приближенного вычисления $\sin \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{\pi}{3}$. Найти абсолютную погрешность Δ , сравнить ее с теоретической оценкой (2.2).

Решение:

Нетрудно видеть, что $\max_{t \in [0, \pi]} |\sin^{(3)} t| = \max_{t \in [0, \pi]} |-\cos t| = 1$.

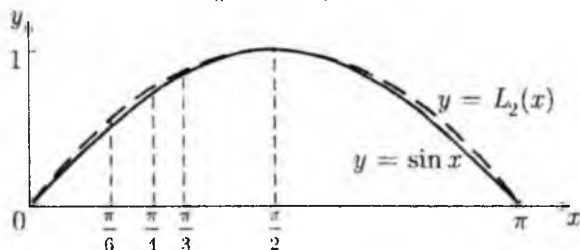
По определению $\omega_3(x) = x(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi)$. Из (2.2) следует, что

$$\Delta(x) = |f(x) - L_2(x)| \leq \frac{|\omega_3(x)|}{3!}.$$

Представим результаты вычислений в виде таблицы:

x	$L_2(x)$	$\sin x$	$\Delta(x)$	$\frac{ \omega_3(x) }{3!}$
$\frac{\pi}{6}$	0.(5)	0.5	$ 0.5 - 0.(5) = 0.0(5)$	$\frac{1}{6} \frac{5\pi^3}{108} \approx 0.23$
$\frac{\pi}{4}$	0.75	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$	$ \frac{\sqrt{2}}{2} - 0.75 = 0.043$	$\frac{1}{6} \frac{3\pi^3}{64} \approx 0.24$
$\frac{\pi}{3}$	0.(8)	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$	$ \frac{\sqrt{3}}{2} - 0.(8) = 0.043$	$\frac{1}{6} \frac{\pi^3}{27} \approx 0.19$

Графики $\sin x$ и $L_2(x) = \frac{4}{\pi} x (1 - \frac{1}{\pi} x)$ изображены на рисунке:



Мы видим, что теоретическая оценка может быть сильно завышена. ■

Задача 2.5. Показать, что ИМЛ для функции $\cos x$ на сетке из трех точек $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ имеет первую степень.

2.2. Приближение функции по методу наименьших квадратов

В случае, когда нужно найти приближение функции на сетке с большим количеством узлов, использование ИМЛ может оказаться затруднительным.

Приближение функции f многочленом степени не выше m методом наименьших квадратов заключается в нахождении многочлена $P_m(x) = h_0 + h_1x + \dots + h_mx^m$, для которого достигает минимума величина

$$\|P_m - f\|_2,$$

называемая *среднеквадратичным отклонением* P_m от f .

Положим

$$\begin{aligned} r(h_0, h_1, \dots, h_m) &= \|P_m - f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P(x_i) - f(x_i))^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_0 + h_1x_i + \dots + h_mx_i^m - f(x_i))^2}. \end{aligned}$$

Функция $r(h_0, h_1, \dots, h_m)$ достигает минимального значения на том же наборе (h_0, h_1, \dots, h_m) , что и функция

$$R(h_0, h_1, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^n (h_0 + h_1x_i + \dots + h_mx_i^m - f(x_i))^2.$$

Пример 2.2. Для функции f , заданной на сетке $\{x_1, \dots, x_n\}$, построить по методу наименьших квадратов многочлен $P_0(x)$.

Решение:

Искомый многочлен имеет вид $P_0(x) = h_0$, значит,

$$R(h_0) = \sum_{i=1}^n (h_0 - f(x_i))^2.$$

Минимум этой функции достигается при h_0 , удовлетворяющем условию $R'(h_0) = 0$:

$$R'(h_0) = \sum_{i=1}^n 2(h_0 - f(x_i)) = 2nh_0 - 2 \sum_{i=1}^n f(x_i) = 0.$$

Отсюда $P_0(x) = h_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$. ■

Задача 2.6. Для функции f , заданной таблицей

x	1	2	3
f	-2	3	1

построить по методу наименьших квадратов многочлен $P_0(x)$ и вычислить среднеквадратичное отклонение.

Решение:

Воспользуемся формулой из примера 2.2 и получим

$$P_0(x) = \frac{1}{3}(-2 + 3 + 1) = \frac{2}{3}.$$

Среднеквадратичное отклонение равно

$$\|P_0 - f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\left(\frac{2}{3} + 2 \right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 3 \right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1 \right)^2 \right)} = \frac{\sqrt{38}}{3} \approx 2.1.$$

■

Пример 2.3. Для функции f , заданной на сетке $\{x_1, \dots, x_n\}$, построить по методу наименьших квадратов многочлен $P_1(x)$.

Решение:

Искомый многочлен имеет вид $P_1(x) = h_0 + h_1x$, значит,

$$R(h_0, h_1) = \sum_{i=1}^n (h_0 + h_1x_i - f(x_i))^2.$$

Минимум этой функции достигается при (h_0, h_1) , удовлетворяющих условию $\frac{\partial R}{\partial h_0}(h_0, h_1) = \frac{\partial R}{\partial h_1}(h_0, h_1) = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial h_0}(h_0, h_1) = \sum_{i=1}^n 2(h_0 + h_1x_i - f(x_i)) = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial h_1}(h_0, h_1) = \sum_{i=1}^n 2x_i(h_0 + h_1x_i - f(x_i)) = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} h_0n + h_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n f(x_i), \\ h_0 \sum_{i=1}^n x_i + h_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i). \end{cases} \quad (2.3)$$

Коэффициенты h_0, h_1 являются решением этой системы, ее можно решить методом Гаусса или методом Крамера. ■

Задача 2.7. Для функции f , определенной в задаче 2.6, построить по методу наименьших квадратов многочлен $P_1(x)$ и вычислить среднеквадратичное отклонение.

Решение:

Для нахождения коэффициентов многочлена $P_1(x)$ воспользуемся системой (2.3). Вычислим ее коэффициенты:

$$\begin{aligned} n = 3; \quad \sum_{i=1}^3 x_i &= 6; \quad \sum_{i=1}^3 f(x_i) = 2; \\ \sum_{i=1}^3 x_i^2 &= 14; \quad \sum_{i=1}^3 f(x_i)x_i = 7. \end{aligned}$$

Получим систему

$$\begin{cases} 3h_0 + 6h_1 = 2, \\ 6h_0 + 14h_1 = 7. \end{cases}$$

откуда $h_0 = -\frac{7}{3}$, $h_1 = \frac{3}{2}$.

Значит, $P_1(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{3}$, $P_1(0) = -\frac{5}{6}$, $P_1(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3}$, $P_1(\pi) = \frac{13}{6}$.

Среднеквадратичное отклонение равно

$$\|P_1 - f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\left(-\frac{5}{6} + 2\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{13}{6} - 1\right)^2 \right)} = \frac{\sqrt{98}}{6} \approx 1.65.$$

■

3. Численное интегрирование

Задача численного интегрирования состоит в приближенном вычислении определенного интеграла

$$I_a^b = \int_a^b f(x) dx$$

от некоторой интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функции f . Для этого используют *квадратурные формулы* вида

$$\tilde{I}_a^b(n) = \sum_{i=0}^n c_i f(x_i).$$

где c_i — весовые коэффициенты, x_i — точки отрезка $[a, b]$, и

полагают $I_a^b(n) = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) = \tilde{I}_a^b(n)$.

Простейшие квадратурные формулы можно получить, заменяя подынтегральную функцию $f(x)$ на некоторую функцию $\varphi(x)$, которая, во-первых, близка к $f(x)$, а, во-вторых, легко интегрируется. В качестве такой функции можно брать ИМЛ на некоторой сетке.

3.1. Метод прямоугольников

Метод прямоугольников заключается в замене функции $f(x)$ на ИМЛ нулевой степени. Для произвольной точки $\xi \in [a, b]$ имеем $L_0(x) = f(\xi)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(\xi)dx = (b-a)f(\xi). \quad (3.1)$$

В зависимости от выбора ξ различают три основных разновидности формулы.

При $\xi = a$ получаем **формулу левых прямоугольников**

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a).$$

При $\xi = b$ получаем **формулу правых прямоугольников**

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(b).$$

При $\xi = \frac{a+b}{2}$ получаем **формулу средних прямоугольников**

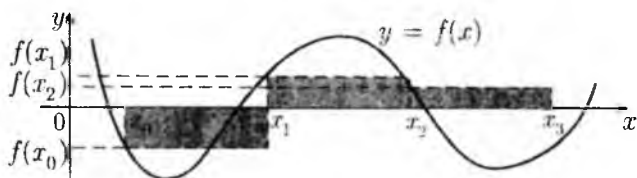
$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

На практике используется *обобщенная формула прямоугольников* с параметром n . Пусть $h = \frac{b-a}{n}$ — шаг метода, положим $x_k = a + kh$. Тем самым разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей. На каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, применим формулу (3.1):

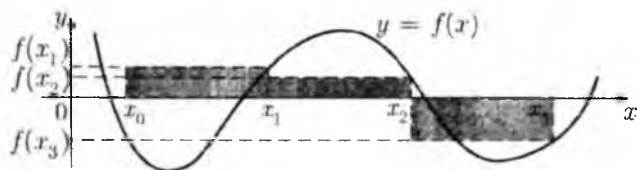
$$I_a^b = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx h \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) = \tilde{I}_a^{bnp}(n), \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}].$$

При использовании обобщенной формулы требуется n вычислений значения функции $f(x)$ в точках отрезка $[a, b]$.

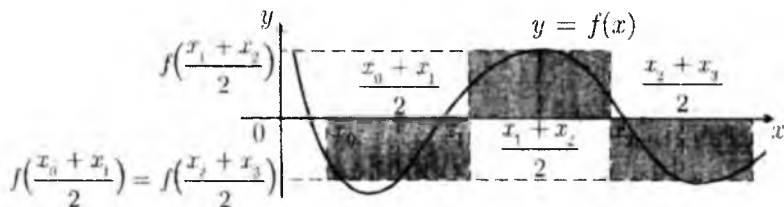
Геометрический смысл метода прямоугольников проиллюстрирован на следующих трех рисунках. Для вычисления определенного интеграла суммируются площади выделенных прямоугольников. При этом площади прямоугольников, лежащих над осью Ox берутся со знаком "+", а площади прямоугольников, лежащих под осью Ox — со знаком "-".



Метод левых прямоугольников



Метод правых прямоугольников



Метод средних прямоугольников

3.2. Метод трапеций

Метод трапеций заключается в том, что функция $f(x)$ заменяется на ИМЛ первой степени на сетке $\{a, b\}$. Используя результат, полученный в примере 2.1, при $x_1 = a$, $x_2 = b$ получим

$L_1(x) = \frac{b f(a) - a f(b)}{b - a} + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$, откуда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_1(x) dx = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Обобщенная формула трапеций:

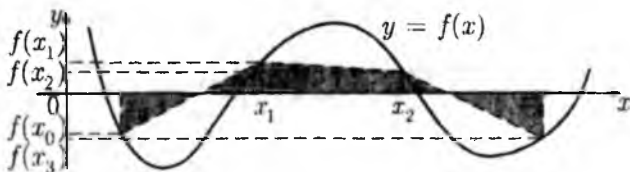
$$\Gamma_a^b = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})) = \bar{I}_a^{bTP}(n).$$

При использовании этой формулы значения функции $f(x)$ во всех внутренних точках отрезка $[a, b]$ нужно вычислять дважды. Чтобы этого избежать, преобразуем сумму:

$$\bar{I}_a^{bTP}(n) = h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right).$$

В этом случае требуется $n + 1$ вычислений значения функции $f(x)$ в точках отрезка.

Геометрический смысл метода трапеций проиллюстрирован на рисунке. Для вычисления определенного интеграла суммируются площади выделенных фигур (трапеций и треугольников) с соответствующими знаками.



3.3. Метод Симпсона (метод парабол)

Более сложной квадратурной формулой является *формула Симпсона (формула парабол)*

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Второе название формулы обусловлено тем, что функция $f(x)$ заменяется на ИМЛ второй степени на сетке $\{a, \frac{a+b}{2}, b\}$; графиком такого многочлена является, как известно, парабола.

Обобщенная формула Симпсона:

$$I_a^b = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right) = \tilde{I}_a^{bC}(n).$$

Задача 3.1. При использовании обобщенной формулы Симпсона требуется $3n$ вычислений значения функции $f(x)$ в точках отрезка $[a, b]$. Преобразовать сумму так, чтобы требовалось $2n + 1$ вычислений.

3.4. Оценка погрешности квадратурных формул

Поскольку найти абсолютную погрешность квадратурных формул в большинстве случаев нельзя или очень сложно, на практике используют теоретические оценки погрешности. Обозначим через I_a^b искомый интеграл, а через $\tilde{I}_a^b(n)$ — значение обобщенной квадратурной формулы с параметром n .

Приведем оценки погрешности рассмотренных методов.

$$|I_a^b - \tilde{I}_a^{b\text{лев. пр.}}(n)| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|.$$

$$|I_a^b - \tilde{I}_a^{b\text{прав. пр.}}(n)| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|.$$

$$|I_a^b - \tilde{I}_a^{b\text{сред. пр.}}(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|.$$

$$|I_a^b - \tilde{I}_a^{(n)}(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|.$$

$$|I_a^b - \tilde{I}_a^{(n)C}(n)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{t \in [a,b]} |f^{(4)}(t)|.$$

Из этих оценок следует, что все перечисленные методы сходятся при $n \rightarrow \infty$, поскольку в этом случае $|I_a^b - \tilde{I}_a^{(n)}(n)| \rightarrow 0$. Заметим, что шаг метода $h = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Итак, метод правых и метод левых прямоугольников имеют первый порядок сходимости, метод средних прямоугольников и метод трапеций — второй, а метод Симпсона — четвертый.

Задача 3.2. Воспользовавшись методами численного интегрирования, вычислить значение $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ при $n = 1$. Найти абсолютную погрешность Δ , сравнить ее с теоретической оценкой.

Решение:

Для получения теоретических оценок вычислим

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, \pi]} |\sin' t| &= \max_{t \in [0, \pi]} |\cos t| = 1, \\ \max_{t \in [0, \pi]} |\sin'' t| &= \max_{t \in [0, \pi]} |-\sin t| = 1, \\ \max_{t \in [0, \pi]} |\sin^{(4)} t| &= \max_{t \in [0, \pi]} |\sin t| = 1. \end{aligned}$$

Известно, что $I_0^{\pi} = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$. Найдем приближенное значение интеграла с использованием квадратурных формул:

$$\tilde{I}_0^{\pi \text{лев.пр}}(1) = \pi \sin 0 = 0;$$

$$\tilde{I}_0^{\pi \text{прав.пр}}(1) = \pi \sin \pi = 0;$$

$$\tilde{I}_0^{\pi \text{сред.пр}}(1) = \pi \sin \frac{\pi}{2} = \pi;$$

$$\tilde{I}_0^{\pi \text{Тр}}(1) = \pi \frac{\sin 0 + \sin \pi}{2} = 0;$$

$$\tilde{I}_0^{\pi C}(1) = \frac{\pi}{6} (\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi) = \frac{2\pi}{3}.$$

Результаты представим в виде таблицы

название метода	$\bar{I}_0^\pi(1)$	$\Delta = I_0^\pi - \bar{I}_0^\pi(1) $	теор.оценка
левых прямоуг.	0	2	$\frac{\pi^2}{2} \approx 4.93$
правых прямоуг.	0	2	$\frac{\pi^2}{2} \approx 4.93$
средних прямоуг.	π	$ 2 - \pi \approx 1.14$	$\frac{\pi^3}{24} \approx 1.29$
трапеций	0	2	$\frac{\pi^3}{12} \approx 2.58$
Симпсона	$\frac{2\pi}{3}$	$ 2 - \frac{2\pi}{3} \approx 0.094$	$\frac{\pi^5}{2880} \approx 0.11$

Задача 3.3. На какое количество отрезков нужно разбить отрезок $[0, \pi]$, чтобы вычислить $\int_0^\pi \sin x^2 dx$ методом средних прямоугольников с точностью $\varepsilon = 0.1$?

Решение:

Воспользуемся теоретической оценкой погрешности и найдем такое целое n , что

$$|I_0^\pi - \bar{I}_0^\pi(n)| \leq \frac{\pi^3}{24n^2} \max_{t \in [0, \pi]} |\sin'' t^2| \leq \varepsilon.$$

т.е.

$$n \geq \sqrt{\frac{\pi^3}{24\varepsilon} \max_{t \in [0, \pi]} |\sin'' t^2|}.$$

Оценим $|\sin'' t^2|$ на отрезке $[0, \pi]$:

$$\sin'' t^2 = (\sin' t^2)' = (2t \cos t^2)' = 2 \cos t^2 - 4t^2 \sin t^2.$$

очевидно, что при $t \in [0, \pi]$

$$|2 \cos t^2 - 4t^2 \sin t^2| \leq 2|\cos t^2| + 4|t^2| |\sin t^2| \leq 2 + 4\pi^2 \approx 41.48.$$

Следовательно, для достижения заданной точности достаточно разбить отрезок на n частей, где n удовлетворяет неравенству

$$n \geq \sqrt{\frac{\pi^3}{24 \cdot 0.1} (2 + 4\pi^2)} \approx 23.15.$$

Например, можно положить $n = 24$. ■

Теоретические оценки погрешности квадратурных формул применимы лишь в случае, когда известно аналитическое представление подынтегральной функции, и требуют нахождения или оценки максимума модуля производных, что часто является непростой задачей. На практике можно вычислять последовательность значений $\bar{I}_a^b(n_0), \bar{I}_a^b(2n_0), \dots, \bar{I}_a^b(2^k n_0), \dots$ и прекращать вычисления, когда выполнится неравенство

$$|\bar{I}_a^b(2^k n_0) - \bar{I}_a^b(2^{k+1} n_0)| \leq \varepsilon,$$

полагая $I_a^b \approx \bar{I}_a^b(2^{k+1} n_0)$.

Задача 3.4. Доказать, что при фиксированном n и $h = \frac{b-a}{n}$ для формулы левых прямоугольников и для формулы трапеций справедливо равенство

$$\tilde{I}_a^b(2n) = \frac{1}{2} \tilde{I}_a^b(n) + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k + \frac{h}{2}\right).$$

4. Итерационные методы приближенного решения задач

Метод решения задачи $y = Ax$ называют *итерационным*, если он основан на использовании повторяющегося процесса и позволяет уточнить некоторое *начальное приближение* x_0 . В результате получается последовательность x_0, x_1, \dots приближенных решений задачи.

Итерационный метод *сходится*, если $x_k \rightarrow x_*$ при $k \rightarrow \infty$, где x_* — точное решение задачи.

Итерационный процесс завершают, когда выполняется некоторое условие, вытекающее из постановки задачи. Наиболее часто используют одно из условий

$$\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|Ax_k - y\| < \varepsilon.$$

5. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Как мы видели ранее, многие задачи сводятся к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Используют две формы записи СЛАУ, координатную

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

и матричную $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей коэффициентов*, вектор-столбец b — *вектором правых частей*, вектор-столбец x — *вектором неизвестных*.

Задача решения СЛАУ состоит в том, чтобы для заданных матрицы A и вектора b найти вектор $x_* = (x_{*1}, x_{*2}, \dots, x_{*n})^T$, удовлетворяющий равенству $Ax_* = b$.

Задача приближенного решения СЛАУ $Ax = b$ состоит в том, чтобы найти вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, удовлетворяющий приближенному равенству $Ax \approx b$.

5.1. Нормы матриц

Нормой матрицы A порядка $n \times m$ называется величина, удовлетворяющая трем аксиомам нормы (см. подраздел 1.2) и *условию согласования* $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ для всех матриц B соответствующей размерности.

Если в качестве B используется вектор x , то норма матрицы должна быть *согласована* с нормой вектора: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Наиболее часто используются следующие нормы:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2},$$

$$\|A\|_c = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|.$$

Задача 5.1. Для матрицы A и вектора x вычислить различные нормы, проверить, выполнено ли условие согласованности, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\|A\|_1 = \max\{|-1| + |3|, |2| + |-5|\} = 7,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{39},$$

$$\|A\|_c = \max\{|-1| + |2|, |3| + |-5|\} = 8;$$

$$\|x\|_1 = |3| + |-4| = 7,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5,$$

$$\|x\|_c = \max\{|3|, |-4|\} = 4.$$

Положим $d = Ax$, тогда $d = (-11, 29)^T$. Проверим выполненные неравенства $\|d\|_r \leq \|A\|_s \|x\|_r$, где $r, s \in \{1, 2, c\}$:

$$\|d\|_1 = 40, \quad \|d\|_2 = \sqrt{962}, \quad \|d\|_c = 29;$$

$$\|A\|_1 \|x\|_1 = 49, \quad \|A\|_1 \|x\|_2 = 35, \quad \|A\|_1 \|x\|_c = 28;$$

$$\|A\|_2 \|x\|_1 = \sqrt{1911}, \quad \|A\|_2 \|x\|_2 = \sqrt{975}, \quad \|A\|_2 \|x\|_c = \sqrt{624};$$

$$\|A\|_c \|x\|_1 = 56, \quad \|A\|_c \|x\|_2 = 40, \quad \|A\|_c \|x\|_c = 32$$

Следовательно, $\|A\|_1$ согласована с $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$; $\|A\|_2$ согласована с $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$; $\|A\|_c$ согласована с $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ и $\|x\|_c$. ■

Задача 5.2. Показать, что в общем случае $\|A\|_1$ согласована с $\|x\|_1$, $\|A\|_2$ — с $\|x\|_2$, $\|A\|_c$ — со всеми нормами векторов.

5.2. Метод простых итераций решения СЛАУ

Метод простых итераций состоит в том, что система $Ax = b$ преобразуется к равносильной системе $x = Bx + d$, в качестве начального приближения выбирается произвольный вектор $x^{(0)}$, а очередное приближение $x^{(k+1)}$ вычисляется по схеме

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d. \quad (5.1)$$

Таким образом значение i -й координаты нового приближения вычисляется по формуле

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j^{(k)} + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

где β_{ij} — элементы матрицы B , d_i — элементы вектора d .

Вычисления прекращают, если выполнено условие

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon,$$

$x^{(k+1)}$ полагают приближенным решением СЛАУ с точностью ε .

Теорема 5.1. *Метод простых итераций (5.1) сходится к единственному решению исходной системы $Ax = b$ при любом начальном приближении $x^{(0)}$, если какая-либо норма матрицы B меньше единицы.*

Сходящийся итерационный процесс обладает свойством *самоисправляемости*, т.е. отдельная ошибка в вычислениях не отразится на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новое начальное.

Задача 5.3. Для итерационной схемы

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

сделать один шаг метода простых итераций с начальным приближением $x^{(0)} = (1.5, 1)^T$.

Решение:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 \\ 0.95 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.95 \\ 3.45 \end{pmatrix}.$$

■

5.3. Примеры построения итерационных схем

Переход от задачи $Ax = b$ к равносильной задаче $x - Bx + d$ может быть осуществлен различными способами. Из теоремы 5.1 следует, что для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы норма матрицы B была меньше единицы. Поэтому имеет смысл рассматривать те способы перехода от одной задачи к другой, при которых можно сформулировать требования к элементам матрицы A .

В качестве нормы матрицы B будем рассматривать $\|B\|_c$, согласованную со всеми нормами векторов.

5.3.1. Метод Якоби

Метод Якоби построения итерационной схемы заключается в том, что из первого уравнения системы $Ax = b$ выражают x_1 , из второго — x_2 , из третьего — x_3 , и так далее.

Задача 5.4. Выписать выражения для элементов β_{ij} матрицы B через элементы a_{ij} матрицы A и выражения для элементов d_i вектора d через элементы b_i вектора b .

Задача 5.5. Доказать, что если элементы матрицы A удовлетворяют условию диагонального преобладания

$$|a_{ii}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

то для матрицы B , полученной по методу Якоби, выполнено $\|B\|_c < 1$.

Задача 5.6. Для системы

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -5, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

построить итерационную схему по методу Якоби.

Решение:

Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} x_1 = & -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}, \\ x_2 = -\frac{2}{5}x_1 & -\frac{2}{5}x_3 - 1, \\ x_3 = \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{4}x_2 & + \frac{11}{4}. \end{cases}$$

Получим итерационную схему

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

Если элементы матрицы A в системе $Ax = b$ не удовлетворяют условию диагонального преобладания, необходимо сначала перейти к такой равносильной системе $\bar{A}x = \bar{b}$, что элементы матрицы \bar{A} удовлетворяют этому условию.

Задача 5.7. Перейти к системе, равносильной данной

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -2, \end{cases}$$

и такой, что ее матрица коэффициентов удовлетворяет условию диагонального преобладания.

Решение:

Запишем расширенную матрицу данной системы:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

и будем анализировать только элементы матрицы A (слева от вертикальной черты), а преобразовывать — всю расширенную матрицу. В каждой строке подчеркнуты элементы, имеющие наибольшую абсолютную величину.

В первой строке преобладает третий элемент. В третьей строке преобладает второй элемент. Во второй строке преобладания

нет. Переставим первую строку на третье место, третью — на второе, вторую — на первое:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & -4 \end{array} \right).$$

Теперь будем добиваться, чтобы в первой строке преобладал первый элемент.

Найдем в первой строке элемент с наибольшей абсолютной величиной, это 4, он стоит на третьем месте. С помощью строки, в которой преобладает третий элемент, получим ноль на третьем месте первой строки. Для этого умножим третью строку на $\frac{4}{5}$ и прибавим к первой:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 + \frac{4}{5} & 3 + \frac{8}{5} & 4 - \frac{20}{5} & 5 - \frac{16}{5} \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & -4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{14}{5} & \frac{23}{5} & 0 & \frac{9}{5} \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & -4 \end{array} \right).$$

Снова найдем в первой строке элемент с наибольшей абсолютной величиной, это $\frac{23}{5}$, он стоит на втором месте. С помощью строки, в которой преобладает второй элемент, получим ноль на втором месте первой строки. Для этого умножим вторую строку на $\frac{23}{5} \cdot \frac{1}{4}$ и прибавим к первой, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{51}{10} & 0 & \frac{23}{20} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & -4 \end{array} \right) = (\bar{A} | \bar{b}).$$

В полученной матрице \bar{A} в первой строке преобладает первый элемент. Таким образом элементы матрицы \bar{A} удовлетворяют условию диагонального преобладания. Искомая система:

$$\begin{cases} \frac{51}{10}x_1 - \frac{23}{20}x_3 = -\frac{1}{2}, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -4, \end{cases}$$

5.3.2. Метод, использующий единичную матрицу

Рассмотрим еще один способ построения итерационной схемы:

$$B = E - A, \text{ где } E \text{ — единичная матрица, } d = b.$$

Задача 5.8. Выписать выражения для элементов β_{ij} матрицы B через элементы a_{ij} матрицы A .

Задача 5.9. Доказать, если элементы матрицы A удовлетворяют условию диагонального преобладания, а также $\|A\|_c < 2$ и $a_{ii} > 0$ при $i = 1, \dots, n$, то для матрицы B , полученной указанным методом, выполнено $\|B\|_c < 1$.

Задача 5.10. Перейти к системе, равносильной системе

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = -5, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

и такой, что для нее выполнены условия, перечисленные в задаче 5.9. Для полученной системы построить итерационную схему.

Решение:

Элементы матрицы коэффициентов удовлетворяют только условию диагонального преобладания.

Уравнения, в которых $a_{ii} < 0$, умножим на -1 . Далее для $i = 1, 2, 3$ поделим i -ю строку на число λ_i такое, что

$$\lambda_i > \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Пусть, например, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 4$. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3 = 3, \\ -\frac{2}{6}x_1 + \frac{7}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = \frac{5}{6}, \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Несложно проверить, что элементы матрицы коэффициентов полученной системы $Ax = \vec{b}$ удовлетворяют всем достаточным условиям, перечисленным в задаче 5.9.

Положим

$$B = E - \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = (\hat{A} | \hat{b}), \quad d = \hat{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{6} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Теперь для решения данной системы можно воспользоваться итерационной схемой $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$. ■

5.4. Метод Зейделя

Метод Зейделя является модификацией метода простых итераций и в некоторых случаях сходится быстрее.

Итерации метода Зейделя отличаются от простых итераций (5.1) тем, что при нахождении i -й компоненты $(k+1)$ -го приближения используются уже найденные компоненты $(k+1)$ -го приближения с меньшими номерами $(1, 2, \dots, i-1)$:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \beta_{ij} x_j^{(k)} + d_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Методы построения итерационной схемы для метода Зейделя полностью аналогичны методам построения итерационной схемы для метода простых итераций. Достаточные условия сходимости метода Зейделя в этих случаях совпадают с достаточными условиями сходимости метода простой итерации.

Задача 5.11. Для итерационной схемы метода Зейделя

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.4x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} + 2.4, \\ x_2^{(k+1)} = -0.3x_1^{(k+1)} - 0.6x_2^{(k)} + 2.2. \end{cases}$$

сделать один шаг с начальным приближением $x^{(0)} = (1, 2)^T$.

Решение:

По условию $x_1^{(0)} = 1$, $x_2^{(0)} = 2$. Вычислим $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$:

$$x_1^{(1)} = -0.4x_1^{(0)} + 0.4x_2^{(0)} + 2.4 = -0.4 + 0.8 + 2.4 = 2.8,$$

$$x_2^{(1)} = -0.3x_1^{(1)} - 0.6x_2^{(0)} + 2.2 = -0.84 - 1.2 + 2.2 = 0.16.$$

Следовательно, $x^{(1)} = (2.8, 0.16)^T$. ■

6. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений

Каждое нелинейное алгебраическое уравнение с одним неизвестным можно представить в виде

$$f(x) = 0. \quad (6.1)$$

Корнем уравнения (6.1) называется число t такое, что $f(t) = 0$.

Задача решения уравнения (6.1) на отрезке $[a, b]$ состоит в нахождении всех корней уравнения, принадлежащих отрезку.

Задача приближенного решения уравнения (6.1) состоит в нахождении числа x такого, что $f(x) \approx 0$.

Далее считаем, что рассматриваемая функция $f(x)$ определена и непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, а также $f(a)f(b) < 0$, т.е. значения функции на концах отрезка имеют разные знаки.

Итерационный метод решения уравнения (6.1) состоит в построении последовательности приближений $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$. В качестве условия, при котором процесс построения прекращается, выбирают одно из следующих условий:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_k)| < \varepsilon. \quad (6.2)$$

Выполнение одного из условий (6.2) не влечет за собой выполнение другого.

Пример 6.1. а) На примере уравнения $e^x - 25 = 0$ на отрезке $[2, 4]$ покажем, что из первого условия (6.2) не следует второе. Корнем уравнения является $t = \ln 25 \approx 3.22$. В качестве приближенного решения рассмотрим $x = 3.3$. При $\varepsilon = 0.1$ выполнено $|3.3 - \ln 25| < \varepsilon$. Однако $|e^{3.3} - 25| \approx 2.11 > \varepsilon$.

б) На примере уравнения $x^3 = 0$ на отрезке $[-1, 1]$ покажем, что из второго условия (6.2) не следует первое. Корнем уравнения является $t = 0$. В качестве приближенного решения рассмотрим $x = 0.1$. При $\varepsilon = 0.01$ выполнено $|0.1^3 - 0^3| = 0.001 < \varepsilon$. Однако $|0.1 - 0| > \varepsilon$. ■

6.1. Метод деления отрезка пополам

Этот метод заключается в построении последовательности вложенных отрезков, содержащих корень уравнения.

Положим $L_0 = [a, b]$ и опишем k -ю итерацию, $k = 0, 1, \dots$. Пусть отрезок $L_k = [a_k, b_k]$ таков, что $f(a_k)f(b_k) < 0$. Точка $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ делит отрезок L_k пополам. Если $f(c_k) = 0$, то корень найден точно, и процесс завершается с результатом $t = c_k$. В противном случае проверяем условие $f(a_k)f(c_k) < 0$. Если условие выполнено, полагаем $L_{k+1} = [a_k, c_k]$, иначе полагаем $L_{k+1} = [c_k, b_k]$. Переходим к следующей итерации.

Если ни на одном из шагов не найдется корень уравнения, то процесс получения отрезков $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k], \dots$ будет бесконечным.

Длина отрезка $L_k = [a_k, b_k]$ равна $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$, она стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Для того, чтобы найти корень уравнения с точностью $\varepsilon > 0$, достаточно остановить процесс деления пополам на таком шаге k , на котором отрезок $[a_k, b_k]$ будет иметь длину не более ε , и положить $t \approx \frac{a_k + b_k}{2}$.

Метод деления отрезка пополам можно применять и в случае, когда на отрезке $[a, b]$ имеется несколько корней уравнения. Тогда будет найден один из корней.

Задача 6.1. Сделать три итерации метода деления отрезка пополам для решения уравнения $x^2 - 3x = 0$ на отрезке

а) $[1, 6]$; б) $[1, 9]$. Сравнить результаты, сделать выводы.

Задача 6.2. Сколько итераций метода деления отрезка пополам необходимо сделать, чтобы решить уравнение $x^2 - 3x = 0$ на отрезке $[1, 6]$ с точностью $\varepsilon = 0.1$?

6.2. Метод простых итераций

Метод простых итераций заключается в том, что от исходного уравнения $f(x) = 0$ переходят к уравнению $x = \varphi(x)$, которое равносильно данному на рассматриваемом отрезке. Затем

выбирают некоторое начальное приближение $x_0 \in [a, b]$. Очередное приближение x_{k+1} вычисляют по формуле

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Вычисления останавливают, когда

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon,$$

и полагают $t \approx x_{k+1}$.

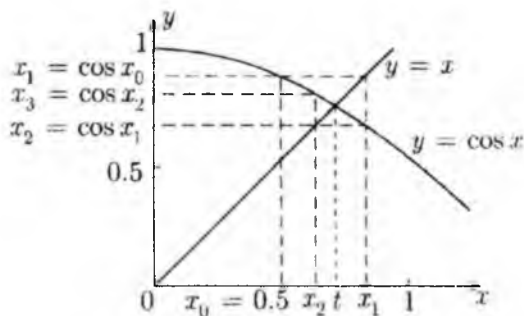
Для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы на отрезке $[a, b]$ выполнялось $|\varphi'(x)| < 1$.

Задача 6.3. Сделать несколько шагов метода простых итераций для уравнения $x - \cos x = 0$ на отрезке $[0, 1]$.

Решение:

Исходное уравнение эквивалентно следующему: $x = \cos x$. Число 0 не является корнем уравнения, поэтому $|\varphi'(x)| = |\cos' x| = |-\sin x| < 1$ при $x \in (0, 1]$.

Положим $x_0 = 0.5$. Метод проиллюстрирован на рисунке:



Здесь

$$x_1 = \cos x_0 \approx 0.8776, \quad x_2 = \cos x_1 \approx 0.64, \quad x_3 = \cos x_2 \approx 0.80, \\ x_4 = \cos x_3 \approx 0.69, \quad x_5 = \cos x_4 \approx 0.77, \quad x_6 = \cos x_5 \approx 0.72.$$

Корнем уравнения является $t \approx 0.7391$. ■

6.3. Метод касательных (метод Ньютона)

Рассмотрим один из вариантов метода простых итераций. Предположим, что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет произ-

водную f' , не меняет характер монотонности (строго возрастает либо строго убывает) и не меняет характер выпуклости (строго выпукла вверх или строго выпукла вниз). В этом случае на рассматриваемом отрезке уравнение имеет ровно один корень. Тогда можно применять схему метода простых итераций

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.3)$$

называемую *методом касательных*, или *методом Ньютона*.

Задача 6.4. Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ на отрезке $[a, b]$, если выполнены условия, приведенные в начале подраздела.

Задача 6.5. Показать, что приближение x_{k+1} , полученное на очередном шаге метода касательных, является абсциссой точки пересечения оси Ox с касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_k, f(x_k))$.

Задача 6.6. Показать, что следующее правило выбора начального приближения гарантирует сходимость метода:

- а) если $f(x)$ возрастает и выпукла вниз, то $x_0 = b$;
- б) если $f(x)$ убывает и выпукла вниз, то $x_0 = a$;
- в) если $f(x)$ убывает и выпукла вверх, то $x_0 = b$;
- г) если $f(x)$ возрастает и выпукла вверх, то $x_0 = a$.

Решение:

Рассмотрим случай а). Случай б) сводится к случаю а), если отразить график функции $f(x)$ относительно оси Oy , случай в) — относительно оси Ox , случай г) — относительно одной и затем относительно другой оси.

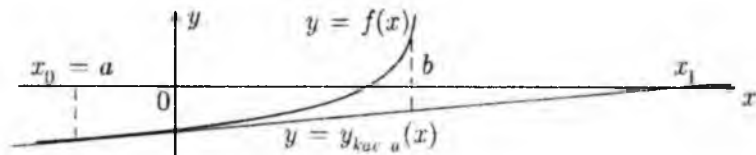
Из возрастания и выпуклости вниз функции на отрезке $[a, b]$ следует, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, а касательная к графику функции в любой точке отрезка возрастает и лежит не выше графика функции. Значит, касательная в точке $(b, f(b))$ пересекает ось Ox в точке $x_1 \in (t, b)$, где t — корень уравнения.

Последовательность приближений x_0, x_1, \dots , построенная по формуле (6.3), удовлетворяет условию

$$t < \dots < x_k < \dots < x_1 < x_0 = b.$$

Следовательно, ее пределом является t . ■

Пример 6.2. Если начальное приближение x_0 выбрано неудачно, то точка x_1 может не принадлежать отрезку $[a, b]$. На рисунке изображен график возрастающей и выпуклой на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$. Выберем в качестве начального приближения точку a , тогда касательная $y_{кас\ a}(x)$ к графику функции $f(x)$ в точке $(a, f(a))$ пересекает ось Ox в точке $x_1 > b$, причем в этой точке функция не определена:



Задача 6.7. Выбрать начальное приближение x_0 и сделать один шаг метода касательных для решения уравнения $2x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$ на отрезке $[-1, 0]$.

Пример 6.3. Правило, описанное в задаче 6.6, можно кратко записать следующим образом:

если $f'(\xi)f''(\xi) < 0$, то $x_0 = a$.

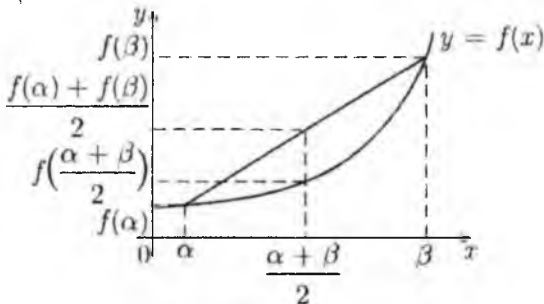
если $f'(\xi)f''(\xi) > 0$, то $x_0 = b$,

где ξ — произвольная точка отрезка $[a, b]$.

Однако для того, чтобы установить знаки производных функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, необходимо знать аналитическое выражение $f(x)$. Даже в этом случае вычисление значений первой и второй производной может быть весьма трудоемким, поэтому имеет смысл пользоваться определением и геометрическим смыслом возрастания функции и ее выпуклости.

Рассмотрим случай а).

На рисунке изображен график возрастающей и выпуклой вниз функции.



Функция $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[a, b]$, если для всех $\alpha, \beta \in [a, b]$ из $\alpha < \beta$ следует $f(\alpha) < f(\beta)$. Иными словами, $f(\alpha + \Delta) - f(\alpha) > 0$ при $\Delta > 0$.

Функция $f(x)$ строго выпукла вниз на отрезке $[a, b]$, если для всех $\alpha, \beta \in [a, b]$ выполнено $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$. Иными словами, $\frac{f(\alpha-\Delta)+f(\alpha+\Delta)}{2} - f(\alpha) > 0$ при $\Delta > 0$. ■

Задача 6.8. Показать, что метод касательных сойдется, если в качестве начального приближения x_0 выбирать точку отрезка $[a, b]$, в которой знак функции совпадает со знаком второй производной, т.е. $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Пример 6.4. Метод касательных эффективен при вычислении квадратных корней из вещественных чисел, отличных от нуля. Пусть нужно найти $x = \sqrt{a}$. Положим $f(x) = x^2 - a$ и рассмотрим уравнение $f(x) = 0$. Поскольку $f'(x) = 2x$, итерационная формула имеет вид

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right), \quad k = 0, 1, \dots$$

Эту формулу приписывают греческому математику Герону. Применим ее для вычисления $\sqrt{720}$. Положим $x_0 = 30$, тогда $x_1 = \frac{30^2 + 720}{60} = 27$. Несложно проверить, что $\sqrt{720} \approx 26.8328$. ■

Задача 6.9. Показать, что метод, использующий формулу Герона, сходится при любом x_0 , отличном от нуля.

6.3.1. Модификация метода касательных

Недостаток метода касательных заключается в том, что на каждом шаге помимо значений функции $f(x_k)$ необходимо вычислять значения ее производной $f'(x_k)$. Этого можно избежать, если использовать следующую формулу:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.4)$$

Задача 6.10. Исследовать условия сходимости и правила выбора начального приближения для метода (6.4).

6.4. Метод секущих (метод хорд)

Другой вариант метода простых итераций, не требующий вычисления производных функции $f(x)$, называется *методом секущих*, или *методом хорд*. Условия применения метода такие же, как и условия применения метода Ньютона (см. подраздел 6.3). Различают два варианта метода.

6.4.1. Метод “с закрепленной точкой”

Используется формула

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_0 - f(x_0)x_k}{f(x_k) - f(x_0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

Для выполнения первой итерации требуется задать два начальных приближения x_0 и x_1 .

Задача 6.11. Показать, что приближение x_{k+1} , полученное на очередном шаге метода “с закрепленной точкой”, является абсциссой точки пересечения оси Ox с секущей, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_k, f(x_k))$.

Задача 6.12. Показать, что следующее правило выбора начальных приближений гарантирует сходимость метода: x_0 выбирается как в задаче 6.6, в качестве x_1 выбирается другой конец отрезка $[a, b]$.

Задача 6.13. Привести пример, когда несоблюдение правила, сформулированного в задаче 6.12, может привести к некорректному применению метода.

Указание к решению: при рассмотрении случая а) воспользоваться следующим свойством возрастающей и выпуклой вниз функции на отрезке $[a, b]$: для любых $\alpha, \beta \in [a, b]$ секущая, проведенная через точки $(\alpha, f(\alpha))$ $(\beta, f(\beta))$, возрастает и между точками α, β лежит не ниже графика функции.

Задача 6.14. Выбрать начальные приближения x_0, x_1 и сделать два шага метода секущих по формуле (6.5) для решения уравнения $2x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$ на отрезке $[-1, 0]$.

6.4.2. Метод “без закрепленной точки”

Используется формула

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_{k-1} - f(x_{k-1})x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

Для выполнения первой итерации также требуется задание двух начальных приближений x_0 и x_1 .

Задача 6.15. Показать, что полученное на очередном шаге метода “без закрепленной точки” приближение x_{k+1} является абсциссой точки пересечения оси Ox с секущей, проходящей через точки $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ и $(x_k, f(x_k))$.

Задача 6.16. Показать, что следующее правило выбора начальных приближений гарантирует сходимость метода: x_0 выбирается как в задаче 6.6, точка x_1 выбирается в непосредственной близости от точки x_0 , желательно между x_0 и корнем.

Привести пример, когда несоблюдение правила выбора x_0, x_1 может привести к некорректному применению метода.

См. указания к решению задачи 6.13.

Задача 6.17. Выбрать начальные приближения x_0, x_1 и сделать два шага метода секущих по формуле (6.6) для решения уравнения $2x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$ на отрезке $[-1, 0]$.

Литература

1. *Андреева Т.В.* Численные методы решения инженерных задач на транспорте: Учебное пособие. — М.: МИИТ, 2009.
2. *Балвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. — М.: Наука, 1983.
3. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т.1. — М.: Наука, 1966.
4. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т.2. — М.: Физматгиз, 1962.
5. *Исаков В.Н.* Элементы численных методов. — М.: Изд.центр “Академия”, 2003.
6. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. — М.: Высш.шк., 2006.

Содержание

1. Введение	3
1.1. Предмет численных методов	3
1.2. Понятие нормы	3
1.3. Погрешность	4
1.3.1. Абсолютная погрешность	4
1.3.2. Сходящиеся методы	5
2. Приближение сеточных функций многочленами	6
2.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа	7
2.2. Приближение функции по методу наименьших квадратов	10
3. Численное интегрирование	12
3.1. Метод прямоугольников	13
3.2. Метод трапеций	15
3.3. Метод Симпсона (метод парабол)	16
3.4. Оценка погрешности квадратурных формул	16
4. Итерационные методы приближенного решения задач	19
5. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	20
5.1. Нормы матриц	20
5.2. Метод простых итераций решения СЛАУ	22
5.3. Примеры построения итерационных схем	23
5.3.2. Метод, использующий единичную матрицу	26
5.3.1. Метод Якоби	23
5.4. Метод Зейделя	27
6. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений	28
6.1. Метод деления отрезка пополам	29
6.2. Метод простых итераций	29
6.3. Метод касательных (метод Ньютона)	30
6.3.1. Модификация метода касательных	34
6.4. Метод секущих (метод хорд)	34
6.4.1. Метод “с закрепленной точкой”	34
6.4.2. Метод “без закрепленной точки”	35
Литература	36

Учебно-методическое издание

Андреева Татьяна Владимировна

**Вычислительная математика в примерах
и задачах**

Методические указания к практическим занятиям

Подписано в печать

Формат 60x84/16

Тираж 150 экз.

Усл.-печ. л. - 2,3

Заказ №

Изд. № 168-11
