

**федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

Кафедра «Теоретическая механика»

**Г.С. НАЗАРЕНКО
В.М. РОМАНОВА
А.В. СКВОРЦОВ**

**СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ
ШАРНИРНЫХ ФЕРМ**

ЧАСТЬ I

*Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве методических указаний для
студентов строительных и механических специальностей*

Москва – 2012

**НТБ МИИТа
Учебная библиотека**

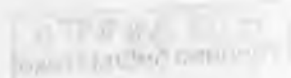
УДК 624.072.2.001.24

Н 19

Назаренко Г.С., Романова В.М., Скворцов А.В. Статический расчет шарнирных ферм. Часть I. Методические указания к выполнению задания по дисциплине «Теоретическая механика». — М.: МИИТ, 2012. — 43 с.

В настоящих методических указаниях приводится задание по статическому расчету плоских статически определимых шарнирных ферм. Приводится пример выполнения задания. Рассматриваются вопросы образования составных конструкций. Методические указания предназначены для студентов строительных и механических специальностей.

© МИИТ, 2012



Введение

Настоящая работа посвящена статическому расчету плоских шарнирных ферм. Учащимся предлагается выполнить домашнее задание, которое содержит три части.

Первая часть задания заключается в определении всех усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов при ручном счете.

Вторая часть задания заключается в статическом расчете фермы методом сечений.

Третья часть задания состоит в выполнении статического расчета фермы методом вырезания узлов с использованием ЭВМ. При этом расчет состоит из двух этапов: логического и арифметического. Логический этап решения задачи заключается в составлении уравнений равновесия фермы методом вырезания узлов. Уравнения равновесия составляются учащимися самостоятельно, без участия ЭВМ. Второй этап решения задачи (арифметический) состоит в решении системы линейных алгебраических уравнений с использованием ЭВМ. В качестве языка программирования учащимся рекомендуется использовать символьный язык Maple. Впрочем, допускается использование других алгоритмических языков, по желанию самих учащихся.

Выполнение статического расчета фермы с использованием ЭВМ освободит учащихся от выполнения рутинных вычислений и позволит им довести до автоматизма навык проецирования силы на направление.

Определение усилий в стержнях фермы методом сечений позволит учащимся овладеть навыком составления одного уравнения равновесия с одним неизвестным и навыком вычисления алгебраического момента силы относительно точки

на плоскости. В работе определенное внимание уделено вопросам анализа образования ферм. Это сделано затем, чтобы учащиеся могли самостоятельно отличать фермы, которые могут быть рассчитаны методами статики, от аналогичных систем, которые в курсе теоретической механики не рассматриваются. Кроме того, эти сведения будут полезны учащимся в дальнейшем при изучении курса строительной механики.

В работе приводится пример выполнения задания и сорок схем плоских статически определимых ферм.

В настоящих методических указаниях отражен многолетний опыт преподавания соответствующих разделов курса теоретической механики студентам различных специальностей Московского государственного университета путей сообщения.

Кроме того, при написании рукописи авторы активно использовали работы профессора Н.Н. Шапошникова и доцента В.А. Ожерельева, которым авторы выражают искреннюю благодарность.

Авторы выражают глубокую благодарность доценту В.И. Скворцову за помощь в отладке отдельных программ и доцентам Ю.А. Горькову и А.С. Архипову, взявшим на себя труд внимательно прочитать текст рукописи и сделавшим ряд полезных предложений, способствовавших улучшению текста.

1. Шарнирные фермы. Общие сведения

Фермой (рис. 1) называют неизменяемую систему, состоящую из прямолинейных стержней, соединенных в узлах идеальными шарнирами, при приложении исключительно узловых нагрузок.

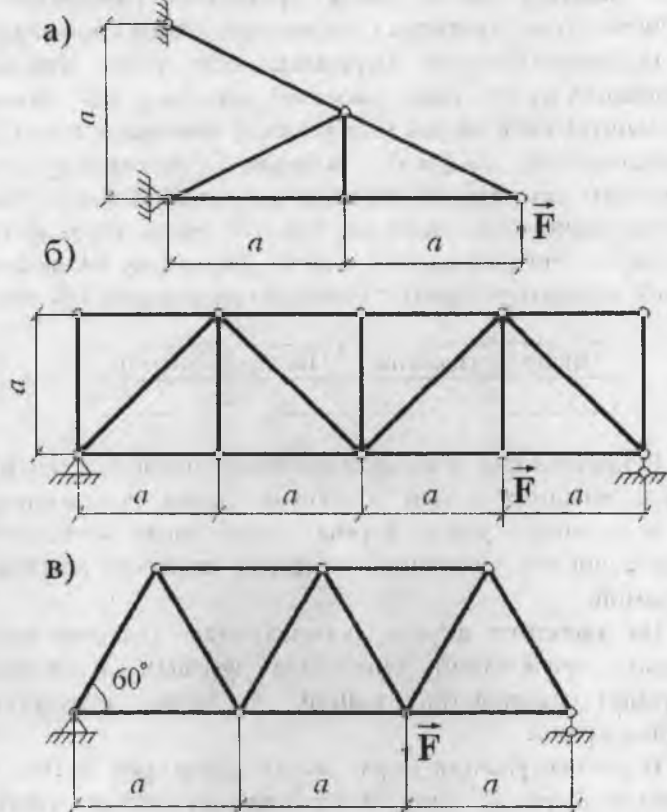


Рис. 1. Примеры простейших ферм

Ферму можно с полным правом рассматривать как систему сочлененных тел, при этом в качестве отдельных тел,

составляющих систему, выступают шарнирные стержни.

Фермы могут быть статически определимыми (неопределимыми). При образовании ферм следует исключить изменяемость системы.

Статически определимой называется ферма, у которой число неизвестных усилий в стержнях плюс число неизвестных опорных реакций равно числу уравнений равновесия. В простейшем случае уравнения равновесия фермы составляются путем последовательного вырезания всех узлов фермы и приравнивания нулю суммы проекций всех сил, действующих на вырезанный узел, на две (для плоской фермы) или три (для пространственной фермы) взаимно перпендикулярных координатных оси. Таким образом, для плоской фермы число уравнений равновесия равно $2n$, где n – число узлов фермы. Статическую определимость плоской фермы, не являющейся составной, можно проверить с помощью следующей таблицы.

Число неизвестных	Число уравнений
$m+3$	$2n$

В таблице под m следует понимать число стержней; 3 – это число внешних связей, которыми ферма прикреплена к земле; n – число узлов фермы. Если число неизвестных совпадет с числом уравнений, то ферма окажется статически определимой.

На практике фермы используются для перекрытия различных препятствий (мостовые фермы), в качестве конструкций перекрытий зданий, а также конструкций подъемных кранов.

В основе расчета ферм лежит положение о том, что шарнирный стержень при отсутствии внеузловой нагрузки работает исключительно на растяжение (сжатие). При ручном счете усилия в стержнях статически определимых ферм можно определять двумя методами: методом сечений и методом вырезания узлов.

2. Анализ матрицы коэффициентов уравнений равновесия для выяснения статической определимости (неопределимости) и геометрической изменяемости (неизменяемости) фермы

Необходимым и достаточным условием статической определимости и геометрической неизменяемости фермы является отличие от нуля определителя матрицы коэффициентов уравнений равновесия A , которая является квадратной:

$$|A| \neq 0.$$

Для формирования матрицы A следует записать для фермы все возможные уравнения равновесия при нулевой внешней нагрузке, используя, например, метод вырезания узлов. После этого из коэффициентов полученных уравнений следует составить матрицу A .

Определение статической определимости и геометрической неизменяемости ферм путем анализа матрицы коэффициентов уравнений равновесия проиллюстрируем примерами.

Пример 1. Требуется выяснить, является ли система, представленная на рис. 2, геометрически изменяемой (неизменяемой).

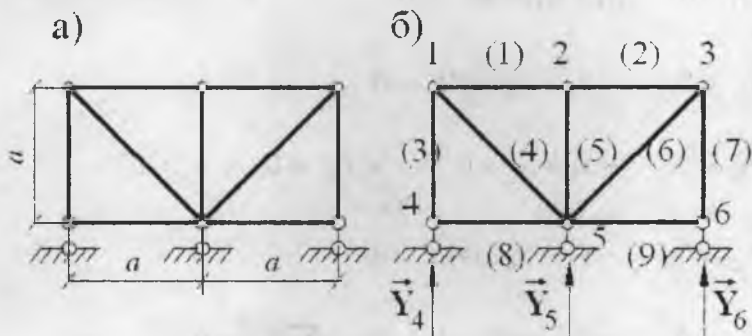


Рис. 2. К примеру 1:

а) заданная система; б) принятая нумерация узлов и стержней
Решение примера выполним в следующей последо-

вательности.

1. Вырезаем последовательно узлы фермы (рис. 3).



Рис. 3. К составлению уравнений равновесия заданной системы методом вырезания узлов

2. Записываем уравнения равновесия каждого узла в виде:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Имеем:

$$\sum_{\text{узел 1}} F_{xi} = 0; \quad S_1 + S_4 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 1}} F_{yi} = 0; \quad -S_3 - S_4 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 2}} F_{xi} = 0; \quad -S_1 + S_2 = 0. \quad \sum_{\text{узел 2}} F_{yi} = 0; \quad S_5 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 3}} F_{xi} = 0; \quad -S_2 - S_6 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 3}} F_{yi} = 0; \quad -S_6 \cos 45^\circ - S_7 = 0. \quad \sum_{\text{узел 4}} F_{xi} = 0; \quad S_8 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 4}} F_{yi} = 0; \quad S_3 + Y_4 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 5}} F_{xi} = 0; \quad -S_4 \cos 45^\circ - S_8 + S_6 \cos 45^\circ + S_9 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 5}} F_{yi} = 0; \quad S_5 + S_4 \cos 45^\circ + S_6 \cos 45^\circ + Y_5 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 6}} F_{xi} = 0; \quad -S_9 = 0. \quad \sum_{\text{узел 6}} F_{yi} = 0; \quad S_7 + Y_6 = 0.$$

3. Коэффициенты полученных уравнений при неизвестных запишем в матрицу **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 & Y_4 & Y_5 & Y_6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

4. Вычислим определитель матрицы **A**, используя символичный язык Maple.

> **det (A) ;**

0

Как и ожидалось, определитель матрицы коэффициентов уравнений равновесия заданной системы A равен нулю. Это означает, что система, представленная на рис. 2, является геометрически изменяемой. Это связано с тем, что три стержня, которыми система прикреплена к земле, параллельны друг другу. При приложении к заданной системе горизонтальной силы система будет перемещаться поступательно в направлении, перпендикулярном шарнирно-подвижным опорам, и не будет нести нагрузку.

Пример 2. Требуется выяснить, является ли система, представленная на рис. 4, геометрически изменяемой (неизменяемой).

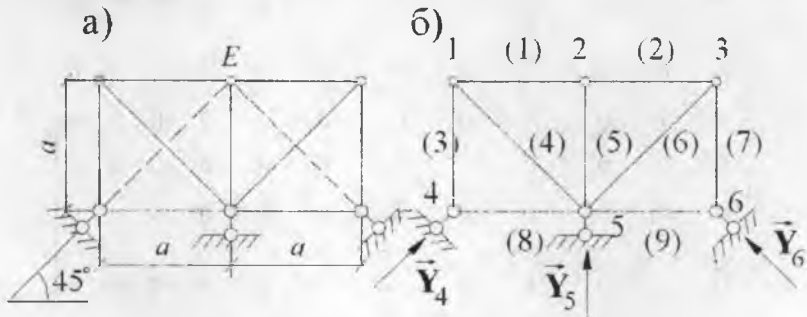


Рис. 4. К примеру 2:

а) заданная система; б) принятая нумерация стержней и узлов

Решение примера выполним в следующей последовательности.

1. Вырезаем последовательно узлы фермы (рис. 5).

2. Записываем уравнения равновесия каждого узла в виде:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Имеем:

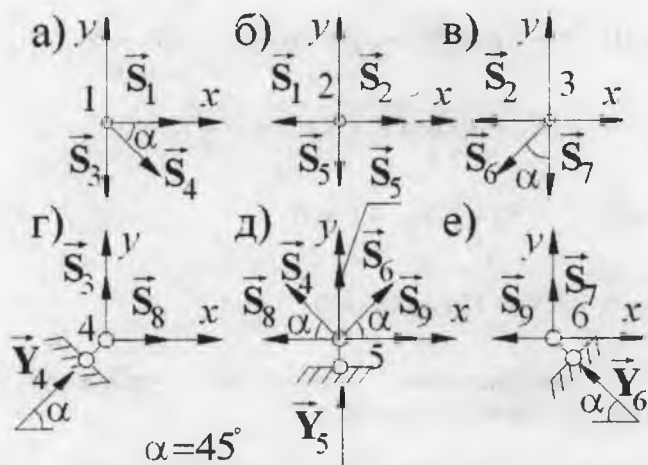


Рис. 5. К составлению уравнений равновесия заданной системы

$$\sum_{\text{узел 1}} F_{xi} = 0; \quad S_1 + S_4 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 1}} F_{yi} = 0; \quad -S_3 - S_4 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 2}} F_{xi} = 0; \quad -S_1 + S_2 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 2}} F_{yi} = 0; \quad S_5 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 3}} F_{xi} = 0; \quad -S_2 - S_6 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 3}} F_{yi} = 0; \quad -S_6 \cos 45^\circ - S_7 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 4}} F_{xi} = 0; \quad S_8 + Y_4 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 4}} F_{yi} = 0; \quad S_3 + Y_4 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 5}} F_{xi} = 0; \quad -S_4 \cos 45^\circ - S_8 + S_6 \cos 45^\circ + S_9 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 5}} F_{yi} = 0; \quad S_5 + S_4 \cos 45^\circ + S_6 \cos 45^\circ + Y_5 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 6}} F_{xi} = 0; \quad -S_9 - Y_6 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 6}} F_{yi} = 0; \quad S_7 + Y_6 \cos 45^\circ = 0.$$

3. Коэффициенты полученных уравнений при неизвестных запишем в матрицу A .

$$A = \begin{matrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 & Y_4 & Y_5 & Y_6 \\ \begin{matrix} \left[\right. \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

4. Вычислим определитель матрицы A , используя

символьный язык Maple.

> $\det(\mathbf{A})$;

0

Как и ожидалось, определитель матрицы \mathbf{A} заданной системы равен нулю. Заданная система является мгновенно изменяемой, так как три стержня, которыми система прикреплена к земле, пересекаются в точке E (см. рис. 4, а). Рассматриваемая система может совершить поворот на бесконечно малый угол относительно т. E , после чего эта система перестанет быть изменяемой. В тот момент, когда все три внешние связи пересекаются в т. E , в стержнях системы возникают бесконечно большие усилия. В практике существование мгновенно изменяемых систем не допустимо.

Пример 3. Требуется выяснить, является ли система, представленная на рис. 6, геометрически изменяемой (неизменяемой).

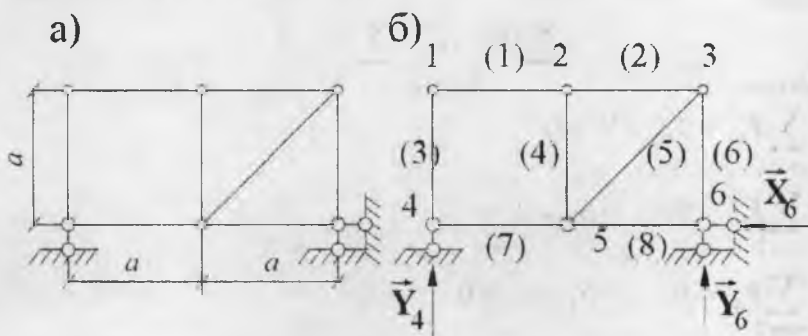


Рис. 6. К примеру 3:

а) заданная система; б) принятая нумерация стержней и узлов

Решение примера выполним в следующей последовательности.

1. Вырезаем последовательно узлы фермы (рис. 7).

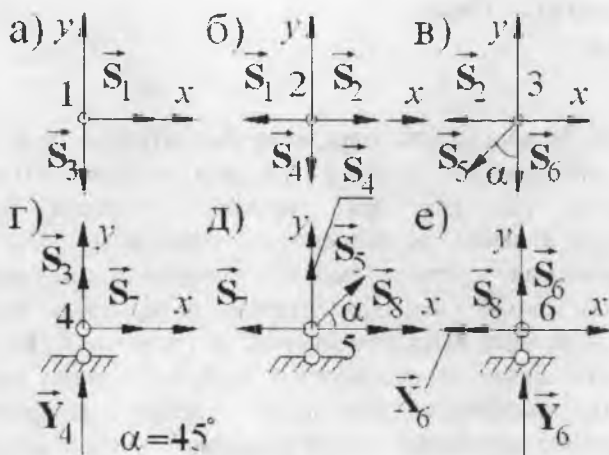


Рис. 7. К составлению уравнений равновесия заданной системы

2. Записываем уравнения равновесия каждого узла в виде:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Имеем:

$$\sum_{\text{узел 1}} F_{xi} = 0; \quad S_1 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 1}} F_{yi} = 0; \quad -S_3 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 2}} F_{xi} = 0; \quad -S_1 + S_2 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 2}} F_{yi} = 0; \quad -S_4 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 3}} F_{xi} = 0; \quad -S_2 - S_5 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 3}} F_{yi} = 0; \quad -S_5 \cos 45^\circ - S_6 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 4}} F_{xi} = 0; \quad S_7 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 4}} F_{yi} = 0; \quad S_3 + Y_4 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 5}} F_{xi} = 0; \quad -S_7 + S_5 \cos 45^\circ + S_8 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 5}} F_{yi} = 0; \quad S_4 + S_5 \cos 45^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 6}} F_{xi} = 0; \quad -S_8 - X_6 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 6}} F_{yi} = 0; \quad S_6 + Y_6 = 0.$$

3. Коэффициенты полученных уравнений при неизвестных запишем в матрицу A .

$$A = \begin{matrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & Y_4 & X_6 & Y_6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Очевидно, что полученная матрица A является прямоугольной. Она содержит 12 строк и 11 столбцов. Число уравнений равновесия на единицу больше, чем число

неизвестных. Поэтому рассматриваемая система является геометрически изменяемой. Чтобы рассматриваемая система превратилась в неизменяемую, необходимо добавить в левой панели раскос.

Учащимся рекомендуется запомнить, что треугольник, составленный из шарнирных стержней, неизменяем, в отличие от четырехугольника.

Пример 4. Требуется выяснить, является ли система, представленная на рис. 8, геометрически изменяемой (неизменяемой) и статически определимой.

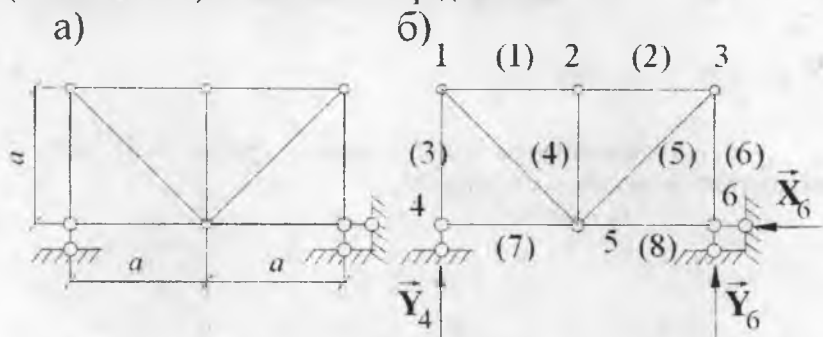


Рис. 8. К примеру 4:

а) заданная система; б) принятая нумерация стержней и узлов

Читателю настоятельным образом рекомендуется самостоятельно получить матрицу коэффициентов уравнений равновесия данной фермы, после чего вычислить ее определитель. Матрица A должна оказаться квадратной, а ее определитель отличным от нуля. Это означает, что рассматриваемая ферма является геометрически неизменяемой и статически определимой.

Более подробную информацию по этому вопросу можно найти в [3].

3. Порядок использования метода вырезания узлов при ручном счете

Расчет статически определимых ферм методом вырезания узлов без использования ЭВМ рекомендуется выполнять в следующей последовательности:

1. Выделяем объект, равновесие которого требуется рассмотреть. Следует указать ферму, землю и три связи, которыми ферма прикреплена к земле.

2. Изображаем заданные силы.

3. Отбрасываем внешние связи и заменяем их действие реакциями. (Под внешними следует понимать связи, которыми ферма прикреплена к земле.)

4. Определяем три опорных реакции из трех уравнений равновесия. При этом каждое уравнение равновесия должно содержать одну неизвестную реакцию.

5. Нумеруем стержни и узлы.

6. Вырезаем узел, к которому примыкают два стержня. Изображаем вырезанный узел, усилия, передающиеся с разрезанных стержней на узел, а также активные и реактивные силы, действующие на вырезанный узел.

Для вырезанного узла составляем уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил в виде

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = 0, \\ \sum F_{yi} = 0. \end{cases}$$

7. Решаем полученную систему линейных уравнений второго порядка относительно усилий в стержнях.

8. Вырезаем такой узел, на который будут действовать со стороны примыкающих к нему стержней два неизвестных усилия с учетом ранее найденных в пункте 7 усилий. После чего процесс расчета повторяется.

С точки зрения ручного счета, метод вырезания узлов уступает методу сечений, так как на каждом шаге метода вырезания узлов необходимо решать систему уравнений **второго** порядка. При этом ошибки в определении усилий на предыдущем шаге приведут к неверному определению усилий

на всех последующих шагах.

4. Пример выполнения задания с использованием метода вырезания узлов при ручном счете

Требуется определить усилия в стержнях фермы, изображенной на рис. 9. Треугольник ABC равносторонний. $AD = DB$. $AE = EC$.

Задачу решим методом вырезания узлов при ручном счете в следующей последовательности:

1. Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями (рис. 15, б).

2. Определяем опорные реакции внешних связей заданной системы.

$$\sum m_A = 0; \quad Y_B \cdot 2a - F \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ = 0 \rightarrow Y_B = \frac{F}{4} \operatorname{tg} 60^\circ.$$

$$\sum m_B = 0; \quad Y_A \cdot 2a - F \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ = 0 \rightarrow Y_A = \frac{F}{4} \operatorname{tg} 60^\circ.$$

$$\sum F_{xi} = 0; \quad -X_A + F = 0 \rightarrow X_A = F.$$

3. Нумеруем стержни и узлы (рис. 9, б).

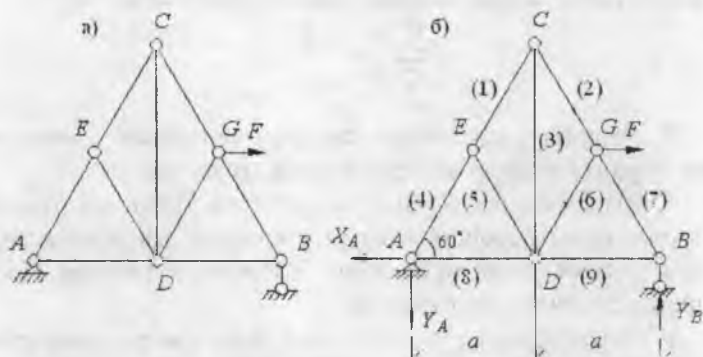


Рис. 9. К расчету фермы методом вырезания узлов

а) заданная система

б) принятая нумерация узлов и стержней

4. Вырезаем узел B (рис. 10)

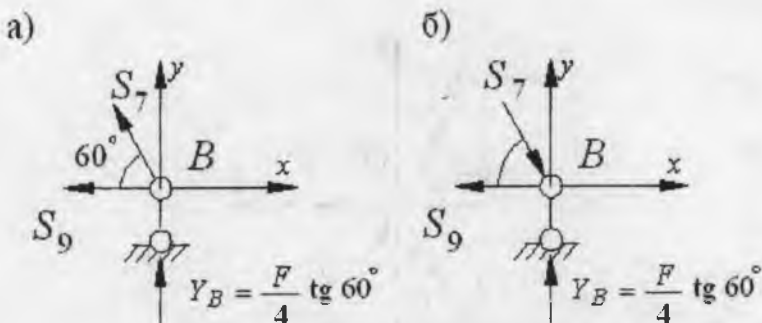


Рис. 10. К составлению уравнений равновесия узла В:

а) узел В до составления уравнений равновесия;

б) узел В после составления уравнений равновесия

Записываем уравнения равновесия узла В:

$$\sum_{\text{узел В}} F_{yi} = 0; \quad S_7 \cdot \sin 60^\circ + \frac{F}{4} \operatorname{tg} 60^\circ = 0 \rightarrow S_7 = -\frac{F}{2}.$$

$$\sum_{\text{узел В}} F_{xi} = 0; \quad -S_9 - S_7 \cdot \cos 60^\circ = 0 \rightarrow S_9 = -S_7 \cdot \cos 60^\circ = \frac{F}{4}.$$

Так как усилие в седьмом стержне оказалось меньше нуля, перечерчиваем усилие S_7 направленным к узлу В (рис. 24, б). Это позволит в дальнейшем при составлении уравнений равновесия подставлять в них усилие S_7 по модулю.

5. Вырезаем узел G (рис.11) и записываем для него уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum_{\text{узел G}} F_{xi} = 0; & -S_2 \cos 60^\circ - S_6 \cdot \sin 30^\circ - \frac{F}{2} \sin 30^\circ + F = 0, \\ \sum_{\text{узел G}} F_{yi} = 0; & S_2 \sin 60^\circ - S_6 \cdot \cos 30^\circ + \frac{F}{2} \cos 30^\circ = 0. \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} S_6 = F, \\ S_2 = \frac{F}{2}. \end{cases}$$

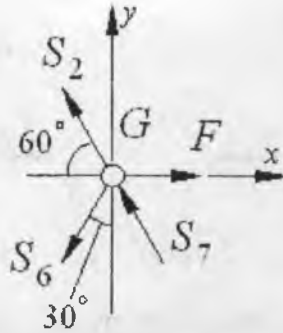


Рис. 11. К составлению уравнений равновесия узла G
6. Вырезаем узел C (рис. 12) и записываем для него уравнения равновесия:

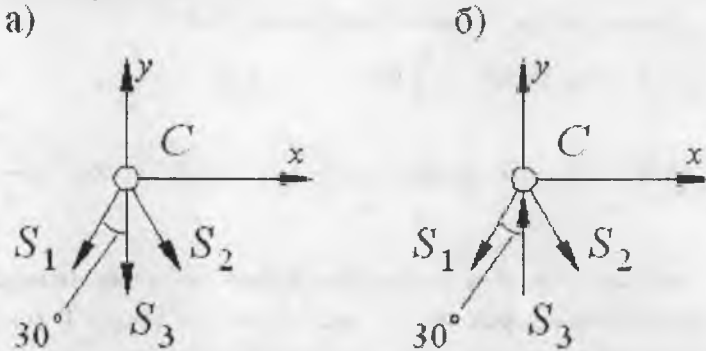


Рис. 12. К составлению уравнений равновесия узла C:
а) узел C до составления уравнений равновесия;
б) узел C после составления уравнений равновесия

$$\begin{cases} \sum_{\text{узел C}} F_{xi} = 0; & -S_1 \sin 30^\circ + \frac{F}{2} \sin 30^\circ = 0, \\ \sum_{\text{узел C}} F_{yi} = 0; & -S_1 \cos 30^\circ - S_3 - \frac{F}{2} \cos 30^\circ = 0. \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} S_1 = \frac{F}{2}, \\ S_3 = -F \cos 30^\circ = -0,866F. \end{cases}$$

7. Вырезаем узел E и составляем для него уравнения равновесия (рис. 13, а):

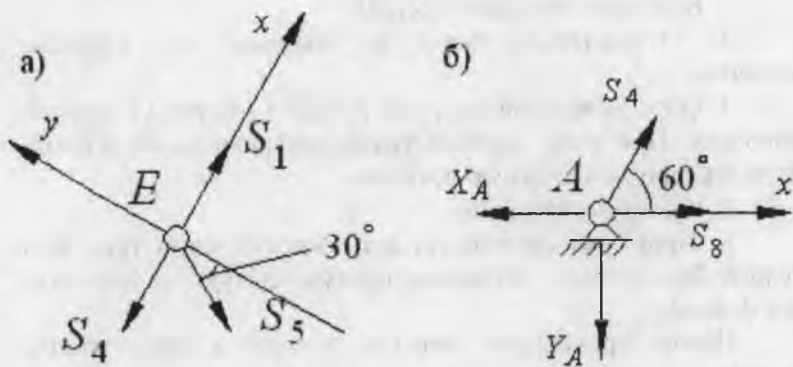


Рис. 13. К составлению уравнений равновесия узлов E и A

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\text{узел } E} F_{yi} = 0; \quad -S_5 \cos 30^\circ = 0, \rightarrow S_5 = 0. \\ \sum_{\text{узел } E} F_{xi} = 0; \quad -S_4 \sin 30^\circ + \frac{F}{2} \cos 60^\circ = 0, \rightarrow S_4 = \frac{F}{2}. \end{array} \right.$$

8. Вырезаем узел A и составляем для него уравнение равновесия (рис. 13, б):

$$\sum_{\text{узел } C} F_{xi} = 0; \quad -F + \frac{F}{2} \cos 60^\circ + S_8 = 0 \rightarrow S_8 = F - \frac{F}{4} = 0,75F.$$

Вычисленные значения неизвестных представим в табличном виде:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$-0,866F$	$\frac{F}{2}$	0	F	$-0,5F$	$0,75F$	$0,25F$

5. Порядок использования метода сечений

Расчет плоских статически определимых ферм методом сечений рекомендуется выполнять в следующей последователь-

ности:

1. Выделяем объект, равновесие которого требуется рассмотреть.

2. Изображаем заданные силы.

3. Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями.

4. Определяем три опорных реакции из трех уравнений равновесия. При этом каждое уравнение равновесия должно содержать одну неизвестную реакцию.

5. Нумеруем стержни.

6. Проводим сечение по возможности через три (два) стержня. Вычерчиваем отдельно правую (левую) отсеченную часть фермы.

После проведения сечения усилия в рассеченных стержнях перестали представлять собой взаимно уравновешенную систему сил, поэтому необходимо показать три неизвестных усилия в трех рассеченных стержнях. Усилие в каждом рассеченном стержне следует направлять вдоль стержня от узла (усилия считаем положительными). Обозначаем неизвестные усилия S_i , где индекс « i » указывает номер рассеченного стержня.

Изображаем активные и реактивные силы, действующие на рассматриваемую отсеченную часть.

Отметим, что усилия в неразрезанных стержнях представляют собой взаимно уравновешенную систему сил. Они компенсируют друг друга, поэтому **не показываются**.

Таким образом, задача сводится к рассмотрению равновесия части фермы, находящейся под действием трех неизвестных сил.

Заметим, что наименьший элемент, который мы можем вырезать из фермы – это шарнирный стержень.

7. Находим каждое из искоемых усилий в рассеченных стержнях, составляя каждый раз **одно** уравнение равновесия с одним неизвестным. Для этого следует для различных случаев пользоваться соответствующей формой записи уравнений равновесия. Удобно в качестве моментной точки выбирать точку пересечения двух неизвестных сил.

8. Проводим второе сечение через три ранее не разрезавшихся стержня, после чего процесс вычислений повторяется.

6. Пример выполнения задания методом сечений

Расчет фермы, приведенной на рис. 14,а, с использованием метода сечений рекомендуется выполнять в следующем порядке.

1. Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями (рис. 14, б).
2. Определяем опорные реакции внешних связей заданной системы.

$$\sum m_A = 0; \quad Y_B \cdot 2a - F \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ = 0 \rightarrow Y_B = \frac{F}{4} \operatorname{tg} 60^\circ.$$

$$\sum m_B = 0; \quad Y_A \cdot 2a - F \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ = 0 \rightarrow Y_A = \frac{F}{4} \operatorname{tg} 60^\circ.$$

$$\sum F_{xi} = 0; \quad -X_A + F = 0 \rightarrow X_A = F.$$

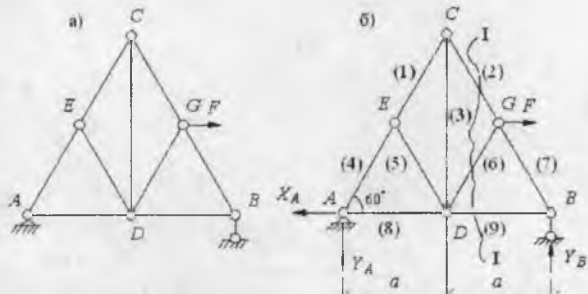


Рис. 14. К расчету фермы методом сечений:

а) заданная система

б) принятая нумерация узлов и стержней

3. Нумеруем стержни (рис. 14, б).

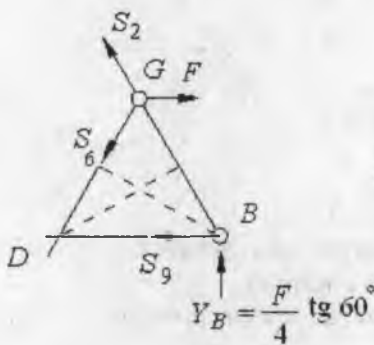
4. Проводим сечение 1-1 (рис. 14, б) после чего рассматриваем правую отсеченную часть заданной системы. Она представляет собой стержень BG , который находится под действием трех неизвестных сил S_2, S_6, S_9 , активной силы F , а также реактивной силы Y_B , уже вычисленной нами (рис. 15, а). Для определения неизвестных воспользуемся второй дополнительной формой уравнений равновесия :

$$\sum m_B = 0; \quad S_6 a \cos 30^\circ - F \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ = 0 \rightarrow S_6 = \frac{F \operatorname{tg} 60^\circ}{2 \cos 30^\circ} = \frac{F \sqrt{3}}{2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = F.$$

$$\sum m_D = 0; \quad S_2 a \cos 30^\circ - F \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ + \frac{F}{4} \operatorname{tg} 60^\circ a = 0 \rightarrow S_2 = \frac{F \operatorname{tg} 60^\circ}{4 \cos 30^\circ} = \frac{F}{2}.$$

$$\sum m_G = 0; \quad -S_9 a \sin 60^\circ + \frac{F}{4} \operatorname{tg} 60^\circ \frac{a}{2} = 0 \rightarrow S_9 = \frac{F \operatorname{tg} 60^\circ}{4 \cdot 2 \sin 60^\circ} = 0,25F.$$

а)



б)

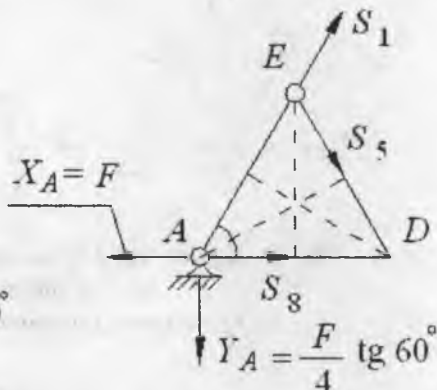


Рис. 15. К примеру 4.1.1:

а) к составлению уравнений равновесия стержня BG

б) к составлению уравнений равновесия стержня AE

5. Вырезаем из фермы стержень AE . Прикладываем активные и реактивные силы, действующие на данный стержень и записываем для него уравнения равновесия (рис. 15, б):

$$\sum m_A = 0; \quad -S_5 a \cos 30^\circ = 0 \rightarrow S_5 = 0.$$

$$\sum m_D = 0; \quad -S_1 a \sin 60^\circ + \frac{F}{4} \operatorname{tg} 60^\circ a = 0 \rightarrow S_1 = \frac{F \operatorname{tg} 60^\circ}{4 \sin 60^\circ} = \frac{1}{2} F.$$

$$\sum m_E = 0; \quad S_8 a \sin 60^\circ - F \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ + \frac{F}{4} \operatorname{tg} 60^\circ \frac{a}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow S_8 = \frac{3F \operatorname{tg} 60^\circ}{8 \sin 60^\circ} = \frac{3}{8} F \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{3}{4} F.$$

6. Для определения усилия в третьем стержне вырежем из фермы треугольник DGB , составленный из шарнирных стержней (рис. 16), и составим следующее уравнение равновесия этого треугольника:

$$\sum m_B = 0; \quad -S_3 a - F \frac{a}{2} \operatorname{tg} 60^\circ = 0 \rightarrow S_3 = -\frac{F}{2} \operatorname{tg} 60^\circ = -\frac{1}{2} F \sqrt{3} = -0,866 F.$$

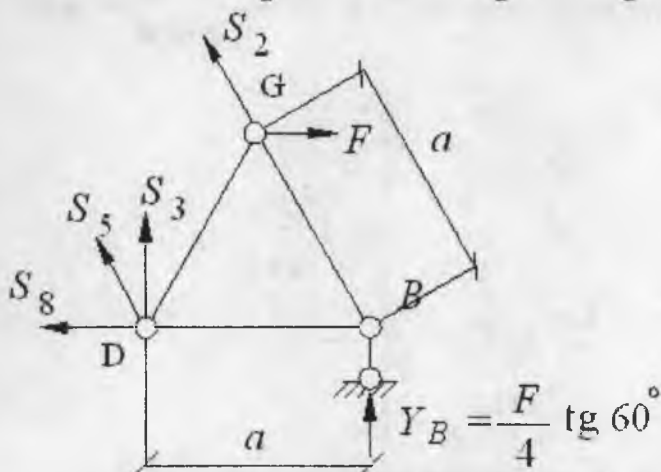


Рис. 16. К определению усилия в третьем стержне S_3

7. Чтобы вычислить усилие в четвертом стержне, вырежем из заданной системы трапецию $ECBD$ (рис. 17) и запишем для нее следующее уравнение равновесия:

$$\sum m_B = 0; S_4 2a \cos 30^\circ - F a \sin 60^\circ = 0 \rightarrow S_4 = -\frac{F \sin 60^\circ}{2 \cos 30^\circ} = -\frac{1}{2} F.$$

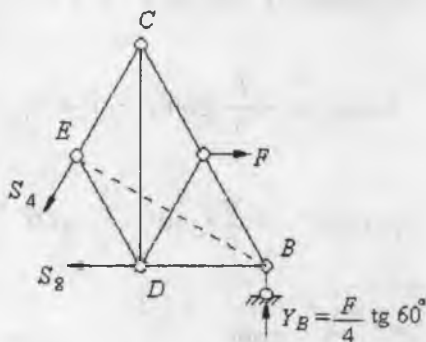


Рис. 17. К определению усилия в четвертом стержне S_4

8. Для определения усилия в седьмом стержне вырежем из фермы трапецию $ACGD$ (рис. 18) и составим для него следующее уравнение равновесия:

$$\sum m_A = 0; -S_7 2a \cos 30^\circ - F a \sin 60^\circ = 0 \rightarrow S_7 = -\frac{F \sin 60^\circ}{2 \cos 30^\circ} = -0,5F.$$

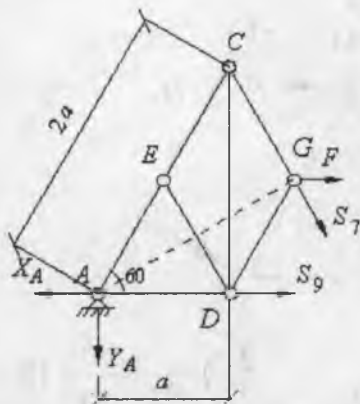


Рис. 18. К определению усилия в стержне S_7

Представим значения неизвестных в табличном виде.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$0,866F$	$\frac{F}{2}$	0	F	$0,5F$	$0,75F$	$0,25F$

7. Порядок расчета ферм с использованием ЭВМ

Расчет ферм с использованием ЭВМ состоит из двух этапов: логического и арифметического. Логический этап состоит в формировании системы уравнений равновесия. В рамках настоящей работы уравнения равновесия будут формироваться вручную. Составление матрицы уравнений равновесия с использованием ЭВМ подробно изложено в [3].

Второй этап расчета состоит в решении системы линейных алгебраических уравнений с помощью символического языка Maple.

Использование ЭВМ меняет логику составления уравнений равновесия. Если при ручном счете предпочтительней является метод сечений, то при использовании ЭВМ гораздо эффективнее оказывается метод вырезания узлов как более удобный для автоматизации. Процесс проведения сквозных сечений, лежащий в основе метода сечений, оказывается весьма сложно формализовать.

При использовании ЭВМ на первое место выходит алгоритмичность расчета, а также **замкнутость** полученной системы уравнений равновесия.

При составлении уравнений равновесия с применением ЭВМ на втором этапе расчета узлы вырезаются в произвольном порядке. Необходимо следить только за правильностью составляемых уравнений, а также за тем, чтобы не забыть вырезать какой-нибудь узел. В противном случае полученная система уравнений не будет замкнутой.

Рекомендуется составлять уравнения равновесия узлов фермы в следующем порядке.

1. Нумеруем узлы и стержни фермы.

2. Для каждого узла составляем два уравнения равновесия в виде:

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = 0, \\ \sum F_{yi} = 0. \end{cases}$$

3. Решаем полученную систему линейных алгебраических уравнений, используя ЭВМ.

8. Пример выполнения задания с помощью метода вырезания узлов с использованием ЭВМ

Рассмотрим ферму, представленную на рис. 19.

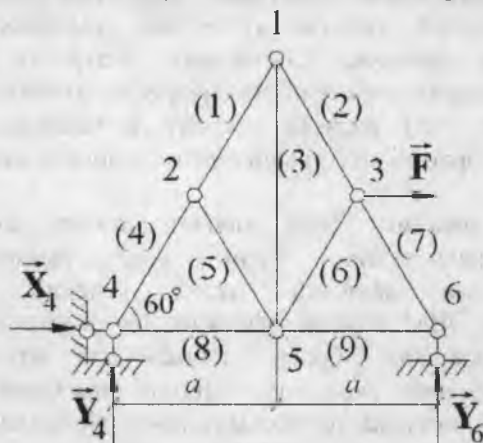


Рис. 19. Заданная система

Расчет фермы с использованием ЭВМ выполним в следующем порядке.

1. Нумеруем узлы и стержни фермы (см. рис. 19).
2. Последовательно вырезаем из заданной системы все узлы с первого по шестой (рис. 20).
3. Для каждого узла составляем два уравнения

равновесия в виде:

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = 0, \\ \sum F_{yi} = 0. \end{cases}$$

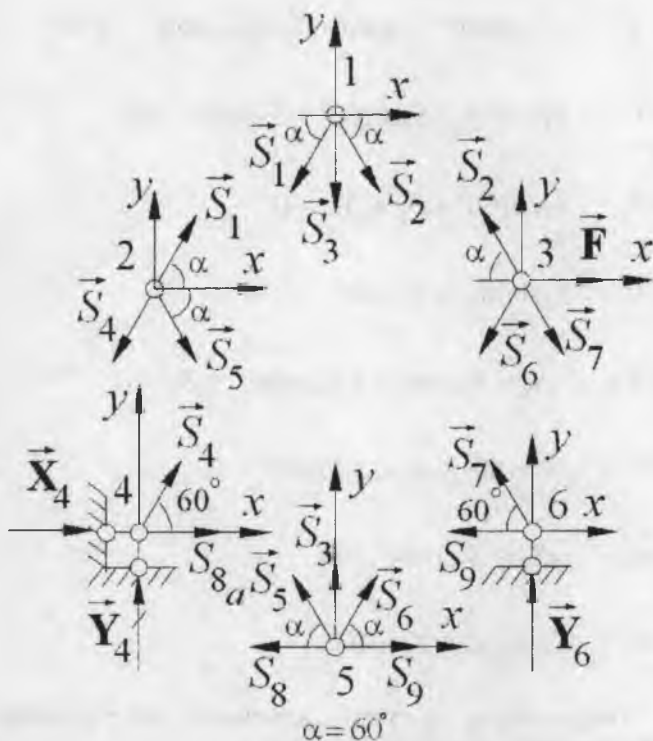


Рис. 20. К составлению уравнений равновесия фермы

Получаем следующие уравнения равновесия.

$$\sum_{\text{узел 1}} F_{xi} = 0; \quad -S_1 \sin 30^\circ + S_2 \sin 30^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 1}} F_{yi} = 0; \quad -S_1 \cos 30^\circ - S_2 \cos 30^\circ - S_3 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 2}} F_{xi} = 0; \quad S_1 \cos 60^\circ - S_4 \cos 60^\circ + S_5 \sin 30^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 2}} F_{yi} = 0; \quad S_1 \sin 60^\circ - S_4 \sin 60^\circ - S_5 \cos 30^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 3}} F_{xi} = 0; \quad -S_2 \cos 60^\circ - S_4 \cos 60^\circ + S_7 \cos 60^\circ + F = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 3}} F_{yi} = 0; \quad S_2 \sin 60^\circ - S_6 \sin 60^\circ - S_7 \sin 60^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 4}} F_{xi} = 0; \quad S_4 \cos 60^\circ + S_8 + X_4 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 4}} F_{yi} = 0; \quad S_4 \sin 60^\circ + Y_4 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 5}} F_{xi} = 0; \quad -S_8 - S_5 \cos 60^\circ + S_6 \cos 60^\circ + S_9 = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 5}} F_{yi} = 0; \quad S_5 \sin 60^\circ + S_3 + S_6 \sin 60^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 6}} F_{xi} = 0; \quad -S_9 - S_7 \cos 60^\circ = 0.$$

$$\sum_{\text{узел 6}} F_{yi} = 0; \quad S_7 \sin 60^\circ + Y_6 = 0.$$

4. Полученную систему линейных алгебраических уравнений запишем в матричной форме:

$$A\bar{S} = \bar{P},$$

где A – матрица коэффициентов уравнений равновесия; \bar{S} – вектор неизвестных; \bar{P} – вектор заданных сил.

Заметим, что матричная форма записи уравнений равновесия, во-первых, позволяет убедиться в статической определимости и геометрической неизменяемости заданной системы, а во-вторых, оказывается весьма удобной при построении линий влияния усилий в стержнях фермы.

Символьный язык Maple не требует обязательной матричной формы записи системы линейных алгебраических уравнений.

Получаем:

$$A = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 & X_4 & Y_4 & Y_6 \\ -\sin 30^\circ & \sin 30^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos 30^\circ & -\cos 30^\circ & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos 60^\circ & 0 & 0 & -\cos 60^\circ & \sin 30^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin 60^\circ & 0 & 0 & -\sin 60^\circ & -\cos 30^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 60^\circ & 0 & 0 & 0 & -\cos 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 60^\circ & 0 & 0 & 0 & -\sin 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 60^\circ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 60^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sin 60^\circ & \sin 60^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos 60^\circ & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin 60^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}^T = [S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6 \ S_7 \ S_8 \ S_9 \ X_4 \ Y_4 \ Y_6].$$

$$\bar{P}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ F \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

5. Решим полученную систему уравнений с использованием символьного языка Maple.

> **S:=transpose(multiply(inverse(A),P));**

S:=

$$[.5000 F, .5000 F, -.8660 F, .5000 F, -.8327 \cdot 10^{-16} F, 1. F, -.5000 F, .7500 F, .2500 F, -1. F, -.4330 F, .4330 F]$$

Учащимся предлагается сверить этот ответ с полученным ранее, чтобы убедиться в его верности.

9. Контрольные вопросы

1. Дайте определение фермы.
2. Укажите необходимое и достаточное условие статической определимости плоской фермы.
3. Укажите необходимое и достаточное условие геометрической неизменяемости плоской фермы.
4. Изложите последовательность использования метода вырезания узлов. В чем заключаются преимущество и недостаток метода вырезания узлов?
5. Изложите последовательность использования метода сечений. В чем заключаются преимущество и недостаток метода сечений?
6. Какие гипотезы лежат в основе статического расчета ферм?
7. Перечислите известные Вам методы определения стержней с нулевым усилием. Ответ проиллюстрируйте примерами.
8. В каком случае можно вычислить усилия в стержнях фермы без предварительного определения опорных реакций?
9. Изложите последовательность определения опорных реакций составных ферм. Ответ проиллюстрируйте примерами. (В качестве примера можно выбрать, например, схему фермы 5-ого варианта.)

10. Варианты задания

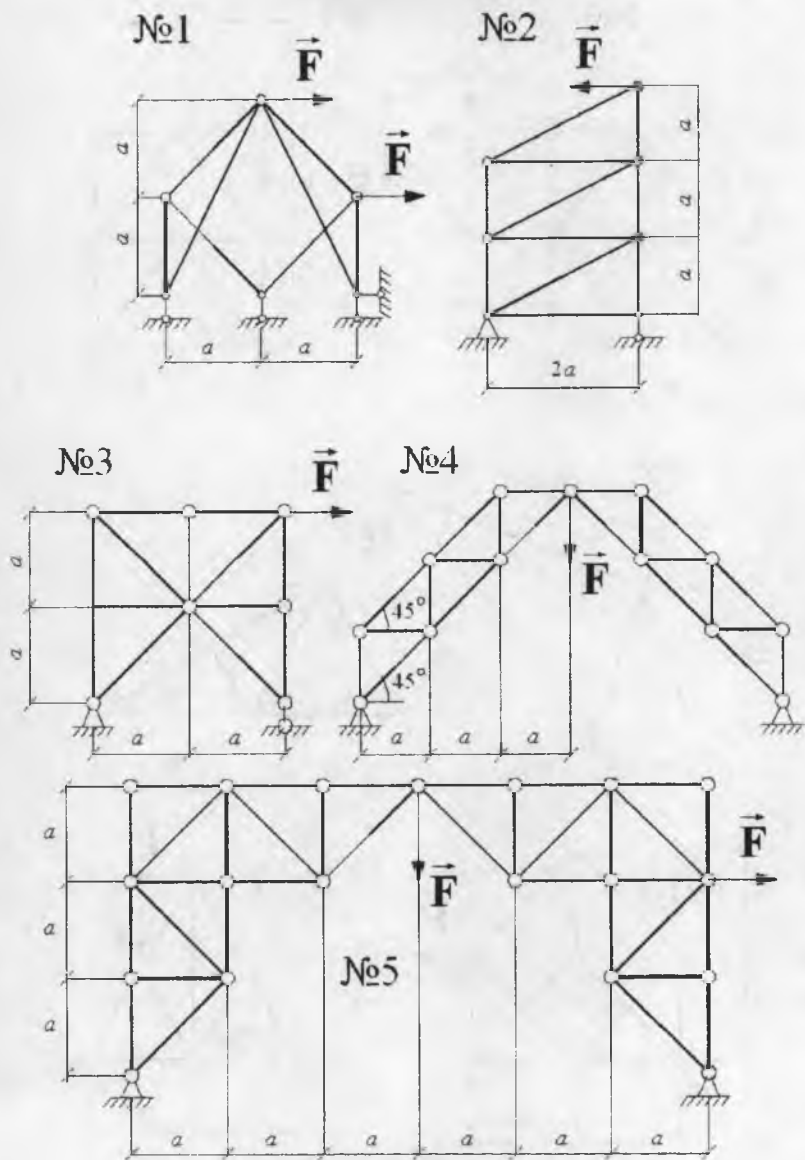


Рис. 21. Варианты задания

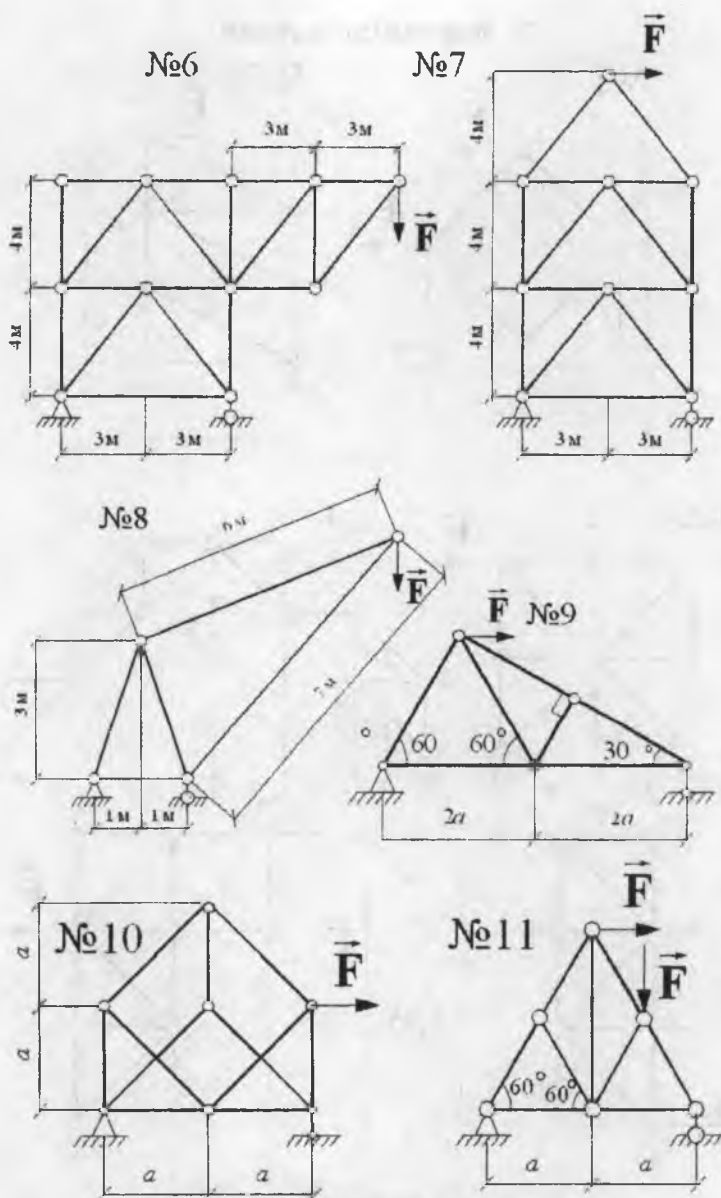


Рис. 22. Варианты задания

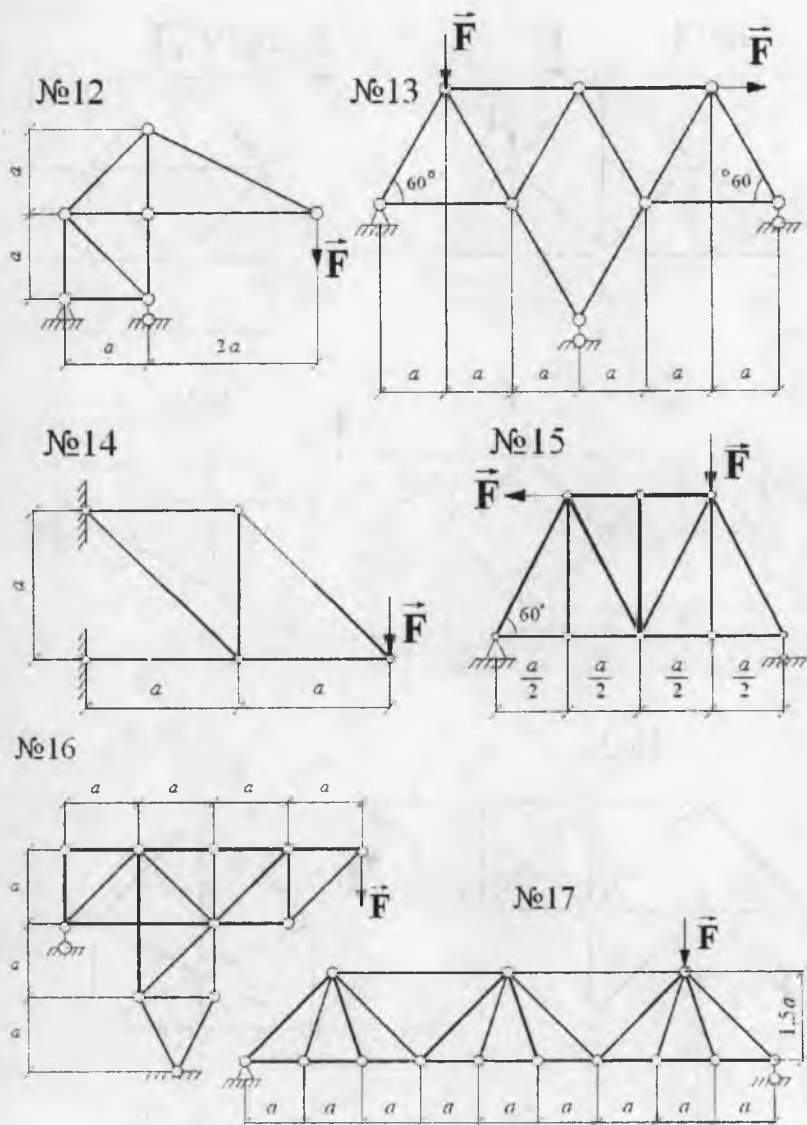


Рис. 23. Варианты задания

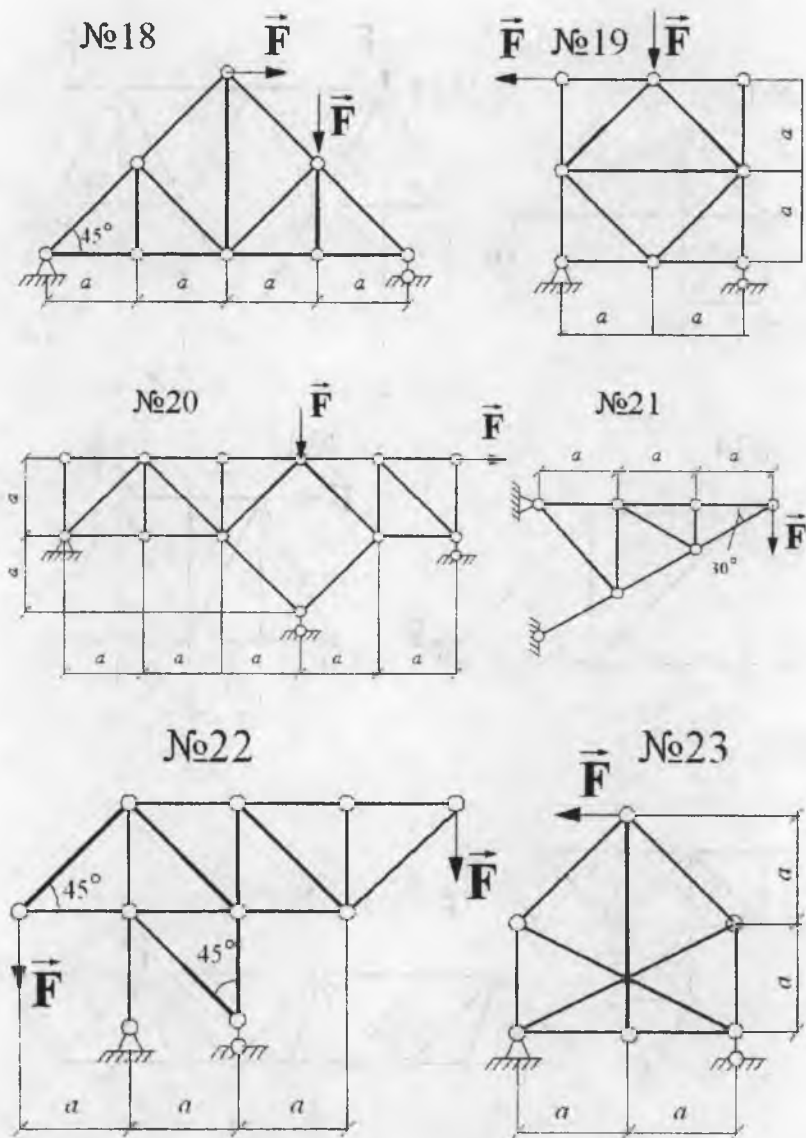
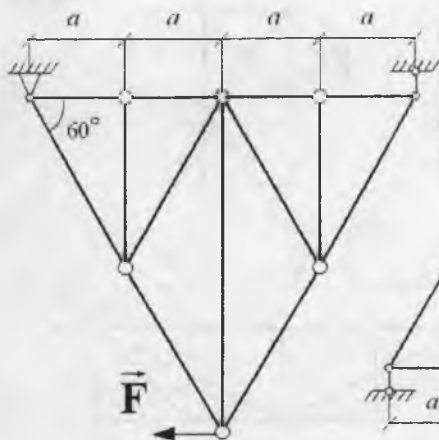
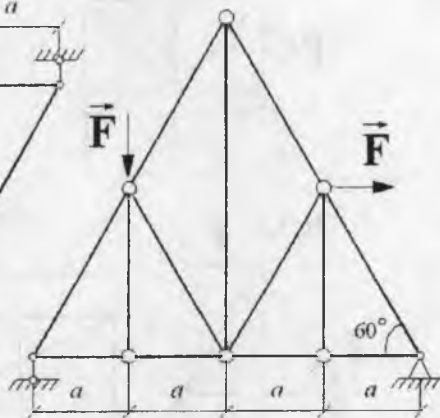


Рис. 24. Варианты задания

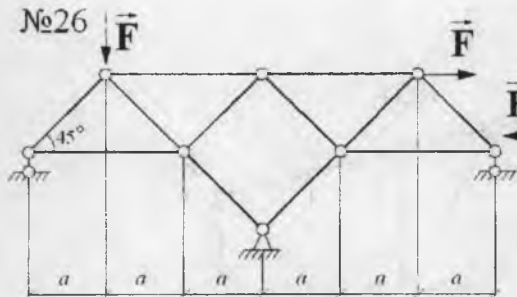
№24



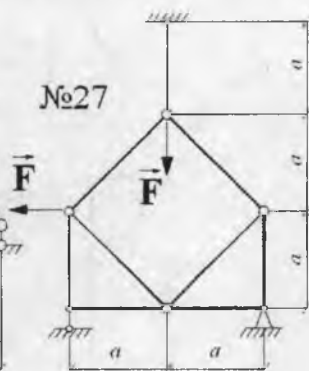
№25



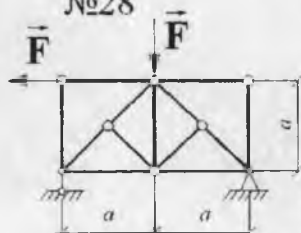
№26



№27



№28



№29

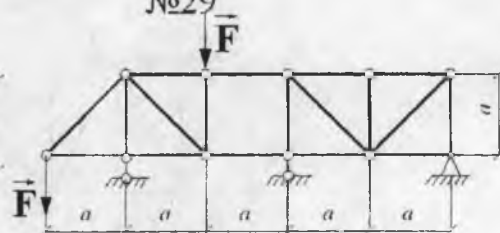
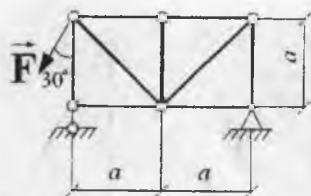
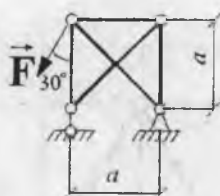


Рис. 25. Варианты задания

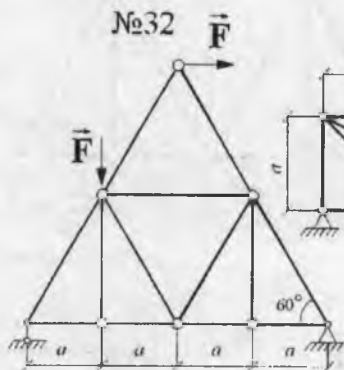
№30



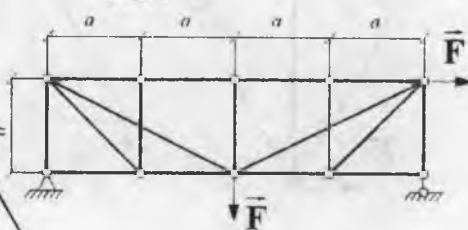
№31



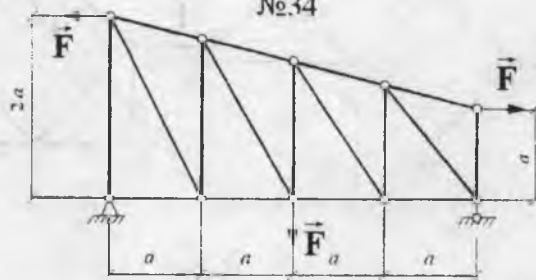
№32



№33



№34



№35

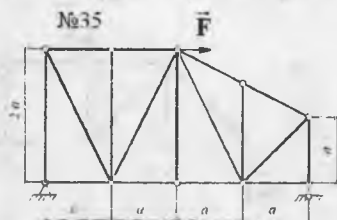


Рис. 26. Варианты задания

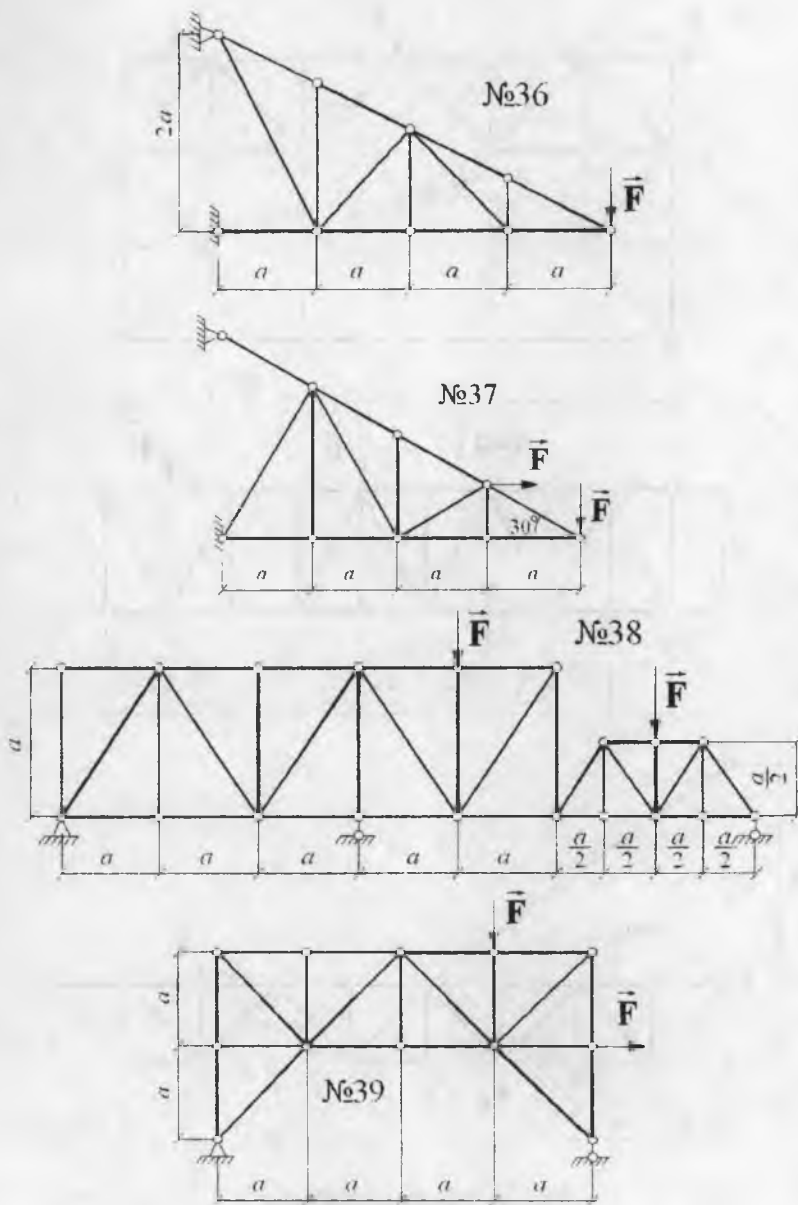


Рис. 27. Варианты задания

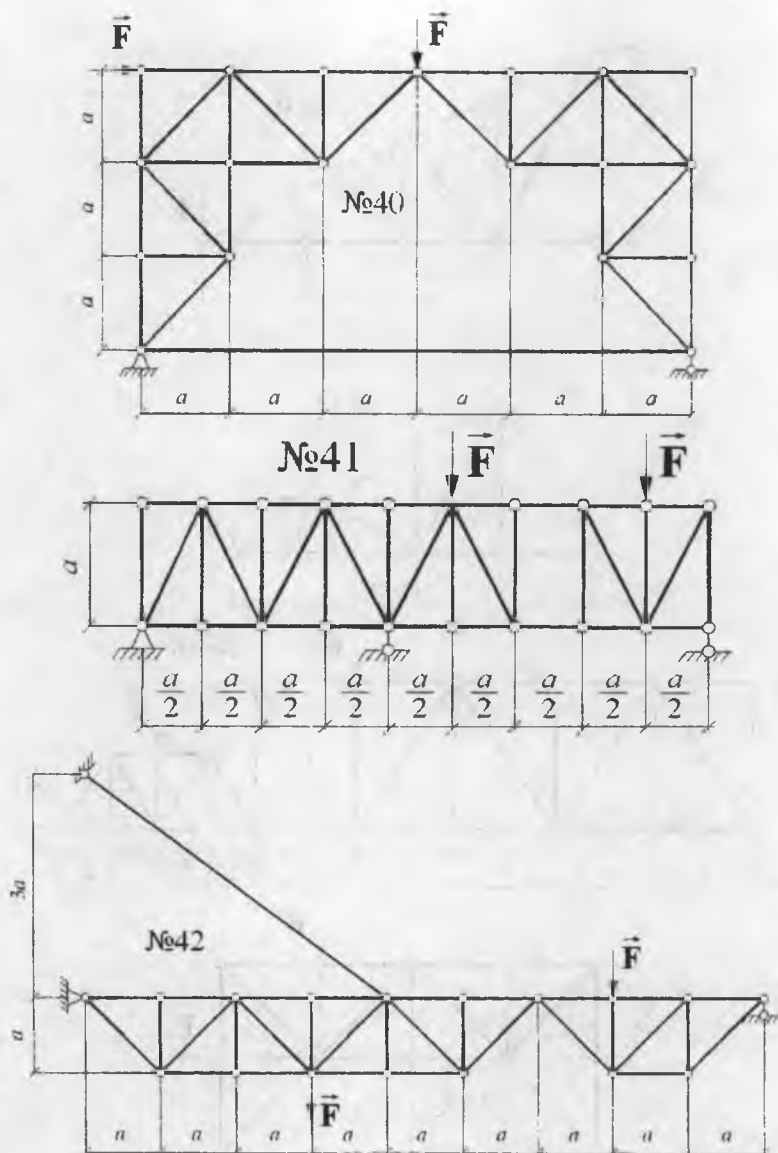


Рис. 28. Варианты задания
 Список литературы

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. т. I. М.: Наука, 1971.– 509 с.
2. Бутенин Н.Н., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1985. Ч. I. –258 с.
3. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: учеб. Для строит. спец. Вузов.–М.: Высш. шк., 1986.– 607 с.
4. Дьяконов В. Maple 6: учебный курс.–СПб.: Питер, 2001.–608 с.
5. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика/ Под ред. А.И. Кириллова.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. –384 с.
6. Лилунь лисуюэ цзетхи чжидао цзи си тхи цзи /Вандо, Чхэнцзинь.– Пекин: гаодэн цзяоюй чхубаньшэ, 2005.– 613 с.
7. Мещеряков В.Б. Курс теоретической механики. М.: МИИТ, 2006.– 285 с.
8. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1990.– 608 с.
9. Скворцов А.В. Равновесие системы твердых тел под действием сил, лежащих в одной плоскости: учеб. пособие.–М.: МИИТ, 2009. – 152 с.
10. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: учебник для вузов.– изд. 14-е.– М.: Интеграл-Пресс, 2007.– 608 с.

Содержание

Введение.....	3
1. Шарнирные фермы. Общие сведения.....	5
2. Анализ матрицы коэффициентов уравнений равновесия для выяснения статической определимости (неопределимости) и геометрической изменяемости (неизменяемости) фермы.....	7
3. Порядок использования метода вырезания узлов при ручном счете.....	17
4. Пример выполнения задания с использованием метода вырезания узлов при ручном счете.....	18
5. Порядок использования метода сечений.....	22
6. Пример выполнения задания методом сечений.....	23
7. Порядок расчета ферм с использованием ЭВМ.....	27
8. Пример выполнения задания с помощью метода вырезания узлов с использованием ЭВМ.....	28
9. Контрольные вопросы.....	32
10. Варианты задания.....	33
Список литературы.....	41

Учебно-методическое издание

**Назаренко Галина Степановна
Романова Валентина Михайловна
Скворцов Арсений Владимирович**

**СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ
ШАРНИРНЫХ ФЕРМ
ЧАСТЬ I**

Методические указания

Подписано к печати –	Формат	Тираж	100 экз.
	60x90/16.		

Усл.-печ. л. – 3,0	Заказ –	Изд. № 35-12
--------------------	---------	--------------

150048, г. Ярославль, Московский пр-т, д. 151.
Типография Ярославского филиала МИИТ.