



**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

Кафедра «Строительная механика»

Е.И.МЕЛЕШОНКОВ, И.И. МОНАХОВ

**НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЕЙ
ПРИ ИЗГИБЕ**

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний
для студентов специализаций «Мосты» и «Тоннели и метрополитены»

МОСКВА - 2014

Мелешонков Е.И., Монахов И.И. Напряжения в поперечных сечениях стержней при изгибе: Методические указания к выполнению домашнего задания №2/н по дисциплине «Сопротивление материалов». - М.: МИИТ, 2014. - 20 с., ил.16.

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам в их самостоятельной работе при выполнении расчетно–проектировочной работы «Напряжения в поперечных сечениях стержня при изгибе».

Кратко излагаются необходимые теоретические сведения. Подробно рассматриваются решения примеров данного задания. Для самостоятельного усвоения материала приводятся контрольные вопросы и список учебной литературы.

Методические указания предназначены для студентов специализаций «Мосты» и «Тоннели и метрополитены».

1. Геометрические характеристики поперечного сечения стержня при изгибе

При расчете балок на изгиб используются более сложные геометрические характеристики поперечного сечения стержня, чем его площадь. Вводятся понятия статических моментов, осевых и центробежных моментов инерции, причем последние вычисляются относительно главных центральных осей.

Под центральными осями понимаются оси, проходящие через центр тяжести поперечного сечения.

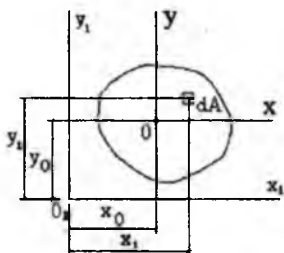


Рис. 1

Координаты центра определяются по формулам

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{A}, x_0 = \frac{S_{y_1}}{A}, \text{ где } (1)$$

$S_{x_1} = \int_A y_1 dA$, $S_{y_1} = \int_A x_1 dA$ - статические моменты относительно произвольно выбранных осей x_1, y_1 (рис. 1).

Среди множества взаимно перпендикулярных центральных осей, необходимо выбрать главные оси. Признаком главных осей является равенство нулю центробежного момента инерции относительно этих осей

$$J_{xy} = \int_A xy dA = 0.$$

Предположим, что оси x, y главные, тогда вычисляются главные центральные моменты инерции по формулам

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA.$$

Моменты инерции сложной фигуры равняется сумме моментов инерции фигур её составляющих. В этом случае моменты инерции отдельных фигур, составляющих сложную фигуру, необходимо вычислять относительно главных центральных осей всей фигуры. Для этого используются формулы преобразования моментов инерции при параллельном переносе осей,

$$J_{x_0} = J_{x_0'} + b^2 A, \quad J_{y_0} = J_{y_0'} + a^2 A, \text{ где } (2)$$

J_{x_0}, J_{y_0} - осевые моменты инерции составляющих фигур относительно собственных центральных осей;

J_x, J_y - осевые моменты инерции составляющих фигур относительно центральных осей сложной фигуры;

b, a - расстояния между параллельными осями.

В дальнейшем будем использовать поперечные сечения стержней, имеющих хотя бы одну ось симметрии. В этом случае ось симметрии является

центральной и одной из главных осей. Вторая главная и центральная ось проходит через центр тяжести сечения и перпендикулярна оси симметрии.

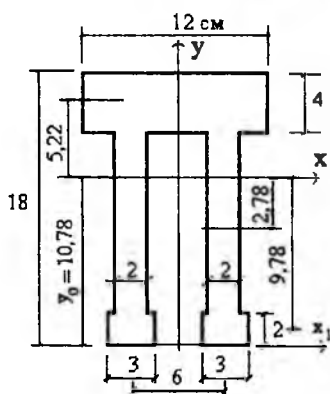
Пример 1.

Для монолитного поперечного сечения (рис.2) вычислить главные центральные моменты инерции.

Решение.

Сечение имеет одну ось симметрии – ось у. Найдем положение центра тяжести сечения. Зададимся положением вспомогательной оси X₁, проходящей через нижнюю грань сечения и составим выражение для определения y₀. В числителе подсчитывается статический момент всего сечения относительно оси X₁, в знаменателе площадь всего поперечного сечения

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{(12 \cdot 4)16 + 2(2 \cdot 12) \cdot 8 + 2(3 \cdot 2) \cdot 1}{(12 \cdot 4) + 2(2 \cdot 12) + 2(3 \cdot 2)} = \frac{1164}{108} = 10,78 \text{ см}$$



Полученную величину y₀=10,78 см откладываем вдоль оси У в положительном направлении и проводим параллельно X₁ главную центральную ось X. Подсчитаем расстояния от центров тяжести прямоугольников, составляющих поперечное сечение, до центральной всей фигуры X. и нанесем их на рисунок 2.

По формулам (2) подсчитаем главные центральные моменты инерции:

$$J_x = \left(\frac{12 \cdot 4^3}{12} + 48 \cdot 5,22^2 \right) + 2 \left(\frac{2 \cdot 12^3}{12} + 24 \cdot 2,78^2 \right) + 2 \left(\frac{3 \cdot 2^3}{12} + 6 \cdot 9,78^2 \right) = 3470,67 \text{ см}^4,$$

Рис. 2

$$J_y = \left(\frac{4 \cdot 12^3}{12} \right) + 2 \left(\frac{12 \cdot 2^3}{12} + 24 \cdot 4,5^2 \right) + 2 \left(\frac{2 \cdot 3^3}{12} + 6 \cdot 4,5^2 \right) = 1141 \text{ см}^4.$$

Первые слагаемые в скобках представляют собой моменты инерции соответствующих прямоугольников относительно своих собственных осей, вторые - обеспечивают переход к главным центральным осям всей фигуры.

Пример 2.

Для составного сечения, состоящего из двух швеллеров № 16, соединенных горизонтальным листом 18х1 см в единое целое (рис.3), вычислить главные центральные моменты инерции. Необходимые характеристики прокатного профиля выписываем из «сортамента» (Гост 8240-89)

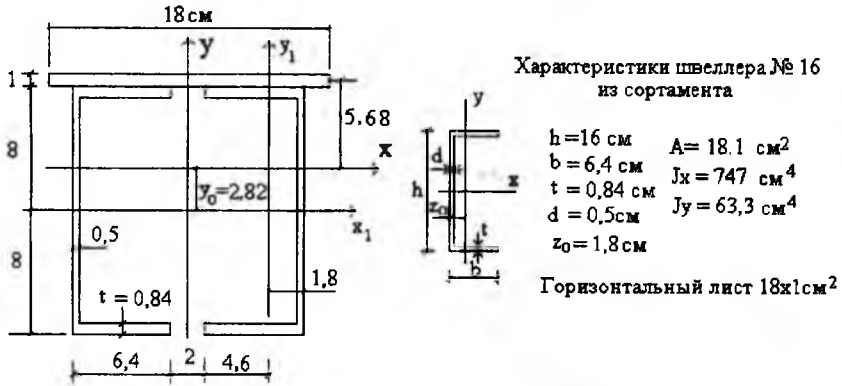


Рис. 3

Решение.

Учитывая симметрию составного поперечного сечения относительно оси У, определим положение другой центральной оси Х. Для этого зададимся вспомогательной осью X_1 , проходящей через центры тяжести швеллеров и вычислим y_0

$$y_0 = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{(18 \cdot 1)(8 + 0,5) + 2(18,1 \cdot 0)}{(18 \cdot 1) + 2(18,1)} = 2,82 \text{ см}.$$

Отложим в масштабе значение y_0 в положительном направлении оси У и проведем вторую центральную главную ось Х.

Вычислим осевые моменты инерции относительно осей Х и У. Необходимые характеристики швеллеров будем брать готовыми из сортамента. Используя уже упомянутые ранее формулы параллельного переноса осей, получим

$$J_x = \left(\frac{18 \cdot 1^3}{12} + (18 \cdot 1) \cdot 5,68^2 \right) + 2(747 + 18,1 \cdot 2,82^2) = 2364 \text{ см}^4,$$

$$j_y = \frac{1 \cdot 18^3}{12} + 2(63,3 + 18,1 \cdot (4,6 + 1)^2) = 1748 \text{ см}^4$$

В дальнейшем некоторые геометрические характеристики поперечных сечений, полученные в этом разделе, будут использованы при решении последующих задач.

2. Распределение нормальных и касательных напряжений по высоте поперечного сечения балки при изгибе

При изгибе балок в их поперечных сечениях возникают два внутренних силовых фактора – поперечная сила и изгибающий момент, которые определяются с помощью метода сечений. Используя аналитические выражения изменения внутренних усилий в пределах каждого участка, строятся графики изменения этих усилий вдоль продольной оси балки – эпюры. С помощью эпюр устанавливаются положения поперечных сечений балки, в которых внутренние усилия достигают наибольших значений.

Изгибающий момент M_x сопровождается возникновением в поперечном сечении балки нормальных напряжений, определяемых по формуле:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y, \quad \text{где:} \quad (3)$$

M_x – внутренний изгибающий момент в сечении;

J_x – момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси x ;

y – расстояние от оси x до рассматриваемой точки.

Как видно из формулы (3), нормальные напряжения σ_z по высоте поперечного сечения распределяются по линейному закону, а по ширине сечения – постоянные. Наибольшие значения σ_z достигают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных, от нейтральной линии (рис.4,б). Знак нормальных напряжений σ_z определяется по эпюре изгибающих моментов.

Поперечная сила Q_y в поперечном сечении балки вызывает касательные напряжения τ_{zy} . Для их определения используется формула Журавского:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{J_x b_y}, \quad \text{где:} \quad (4)$$

Q_y – поперечная сила в сечении;

J_x – момент инерции поперечного сечения относительно главной центральной оси x ;

$S_x^{\text{отс}}$ – статический момент относительно оси x отсеченной части поперечного сечения;

b_y – ширина поперечного сечения на уровне определения касательных напряжений.

Из формулы (4) следует, что касательные напряжения τ_{zy} изменяются по высоте поперечного сечения в зависимости от отношения $S_x^{\text{отс}}/b_y$, по ширине сечения считают, что они распределены равномерно.

Поясним распределение касательных напряжений на примере балки прямоугольного поперечного сечения (рис.4,а). Возьмем произвольную точку k , удаленную от центральной оси x , на расстояние y . Проведем через эту точку линию, параллельную оси x , получив таким образом две отсеченные части (верхнюю и нижнюю) (рис.4,а). Эти отсеченные части теоретически

равноправны. Обычно рассматривают ту отсеченную часть, которая требует меньших вычислений.

Рассмотрим верхнюю отсеченную часть. Площадь отсеченной части $A^{отс} = b(h/2 - y)$. Расстояние от центра тяжести отсеченной части до оси x будет равно

$$y^{отс} = y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right).$$

Статический момент отсеченной части относительно оси x равен

$$S_x^{отс} = A^{отс} y^{отс} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

С учетом того, что для прямоугольного поперечного сечения $b_y = b$, а осевой момент инерции относительно оси x равен $J_x = bh^3/12$, получим выражение для определения касательных напряжений в любой точке поперечного сечения:

$$\tau_{xy} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (5)$$

Формула (5) показывает, что касательные напряжения меняются по высоте сечения по закону квадратной параболы. Построим эту зависимость (рис.4,в):

$$\text{при } y = \pm \frac{h}{2}, \tau_{xy} = 0, \text{ а при } y = 0 \quad \tau_{xy} = \frac{3Q_y}{2bh} = 1,5 \frac{Q_y}{A}.$$

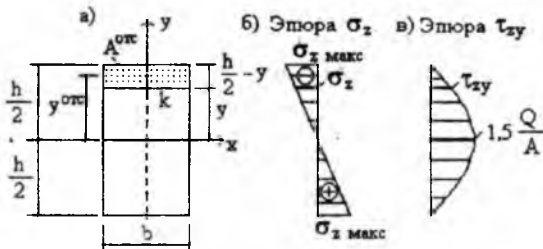


Рис. 4

Анализируя полученный результат, отметим, что в наиболее удаленных от оси x точках поперечного сечения $\tau_{xy} = 0$, потому что для указанных точек $A^{отс} = 0$. Наибольшие касательные напряжения возникают в точках, расположенных на оси x , так как для этих точек статический момент отсеченной части $S_x^{отс}$ будет наибольшим.

Формула (4) может использоваться для определения касательных напряжений в балках, у которых ширина поперечного сечения изменяется ступенчато. В пределах каждого участка с постоянной шириной касательные напряжения меняются по высоте сечения по закону квадратной параболы. В местах ступенчатого изменения ширины сечения касательные напряжения имеют скачки.

По формуле (4) определяются абсолютные значения касательных напряжений, а их направления определяются поперечной силой.

Пример 3.

Для балки (рис.6,а) построить эпюры: поперечных сил Q_y , изгибающих моментов M_x ; нормальных σ_z и касательных τ_{zy} напряжений для соответствующих опасных сечений. Поперечное сечение балки показано на рис.7,а. Геометрические характеристики этого поперечного сечения вычислены в примере 1.

Расчет будем вести по методу предельных состояний, приняв нормативное значение $q = 6$ кН/м, $a = 1,2$ м, коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_p = 1,3$.

Решение.

Используя метод сечений построим эпюры поперечных сил Q_y (рис 6,б) и изгибающих моментов M_x (рис.6,в) соответственно в долях qa и qa^2 . (Процесс построения эпюр внутренних усилий опускаем, так как он подробно рассматривался при выполнении предыдущих расчетно-проектировочных работ). По эпюрам определяем поперечные сечения, в которых действует наибольшие внутренние усилия:

- для сечения «m-m» $M_{расч} = \gamma_p 5 qa^2 = 1,3 * 5 * 6 * 1,2^2 = 56,16$ кНм;
- для сечения «n-n» $Q_{расч} = \gamma_p 3,5 qa = 1,3 * 3,5 * 6 * 1,2 = 32,76$ кН.

Построим эпюру σ_z в сечении «m-m» с наибольшим расчетным изгибающим моментом. Поскольку эпюра линейна по высоте поперечного балки, то для ее построения достаточно подсчитать напряжения в крайних верхних и крайних нижних волокнах сечения:

$$\sigma_z^{верх} = \frac{M_{расч}}{J_x} y_{верх} = -\frac{56,16 \cdot 10^3}{3471 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,0722 = -116,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = -116,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_z^{нижн} = \frac{M_{расч}}{J_x} y_{нижн} = -\frac{56,16 \cdot 10^3}{3471 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,1078 = 174,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 174,4 \text{ МПа}.$$

Полученные значения σ_z отложим в масштабе и соединим прямой наклонной линией (рис. 7,б). Правильность решения подтверждает прохождение этой линии через ноль на уровне оси x . Судя по эпюре изгибающих моментов, в сечении «m-m» растянуты нижние волокна. Поэтому в нижней части эпюры ставим знак «плюс», а в верхней – «минус».

Построим эпюру касательных напряжений в сечении «n-n», где, судя по эпюре Q_y , действует наибольшая поперечная сила. При построении эпюры τ_{zy} необходимо учесть ступенчатое изменение ширины поперечного сечения. Для получения характерных ординат эпюры касательных напряжений необходимо провести три горизонтальных сечения: на границах изменения ширины сечения «I-I», «II-II» и по оси «х» (рис.5).

В точках поперечного сечения, расположенных на крайних верхних и нижних гранях сечения касательные напряжения равны нулю, поскольку отсутствует $A^{отс}$ и соответственно ее статический момент относительно оси x $S_x^{отс}=0$.

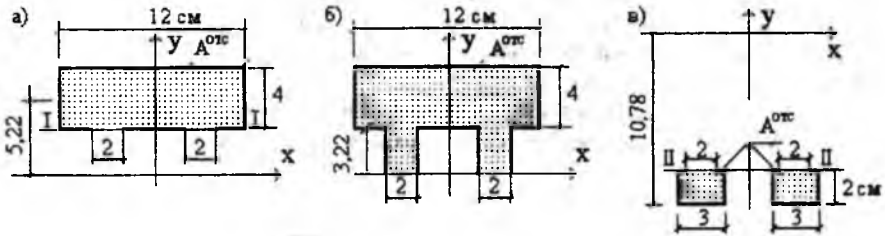


Рис. 5

На рис.5,а показана отсеченная площадь для точек, расположенных на линии «I-I» при движении сверху вниз вдоль оси y . Статический момент отсеченной части относительно центральной оси x равен

$$S_x^{отс} = (12 \cdot 4) \cdot 5,22 = 250,56 \text{ см}^3.$$

На линии «I-I» происходит скачкообразное изменение ширины сечения – выше линии «I-I» ширина сечения 12 см, ниже линии - 4 см. Это обстоятельство вызывает скачок в величине напряжений τ_{xy} :

$$\tau_{xy}^{верх} = \frac{Q_y S_x^{отс}}{J_x b_x} = \frac{32,76 \cdot 10^3 \cdot 250,56 \cdot 10^{-6}}{3471 \cdot 10^{-8} \cdot 12 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy}^{низ} = \frac{Q_y S_x^{отс}}{J_x b_y} = \frac{32,76 \cdot 10^3 \cdot 250,56 \cdot 10^{-6}}{3471 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6 \text{ МПа}.$$

Отсеченная площадь для точек поперечного сечения, расположенных на оси x , показана на рис.5,б:

$$S_z^{отс} = 250,56 + 2(3,22 \cdot 2) \frac{3,22}{2} = 271,3 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{xy} = \frac{32,76 \cdot 10^3 \cdot 271,3 \cdot 10^{-6}}{3471 \cdot 10^{-8} \cdot 4} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,4 \text{ МПа}.$$

Для точек, расположенных на линии «II-II», будем рассматривать, в целях уменьшения вычислений, нижнюю отсеченную часть (рис.5,в):

$$S_x^{отс} = 2(2 \cdot 3) \cdot 9,78 = 117,36 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{xy}^{верх} = \frac{32,76 \cdot 10^3 \cdot 117,36 \cdot 10^{-6}}{3471 \cdot 10^{-8} \cdot 4} = 2,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,8 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{xy}^{низ} = \frac{32,76 \cdot 10^3 \cdot 117,36 \cdot 10^{-6}}{3471 \cdot 10^{-8} \cdot 6} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,8 \text{ МПа}.$$

Эпюра касательных напряжений τ_{zy} в сечении «п-п» изображена на рис.7,в. Направление действия касательных напряжений определяется поперечной силой. Поперечная сила в сечении «п-п» отрицательна, следовательно, она стремится повернуть отсеченную часть балки против хода часовой стрелки. Касательные напряжения действуют по направлению поперечной силы. Знак касательных напряжений обычно связывают с системой координат и принятым правилом знаков.

На рис.8 представлены направления внутренних усилий и соответствующие им напряжений в сечениях «м-м» и «п-п».

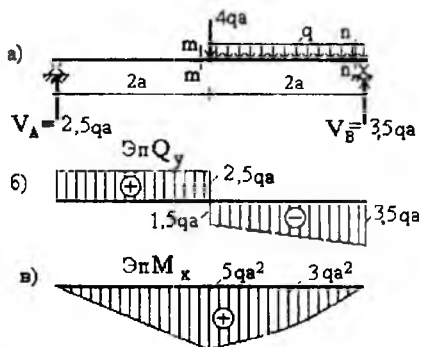


Рис. 6

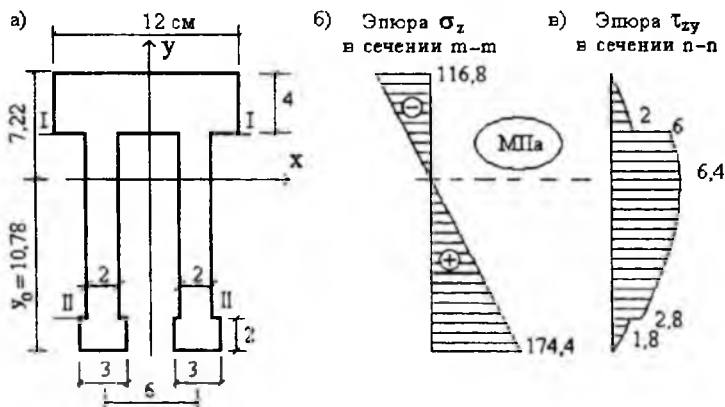


Рис. 7

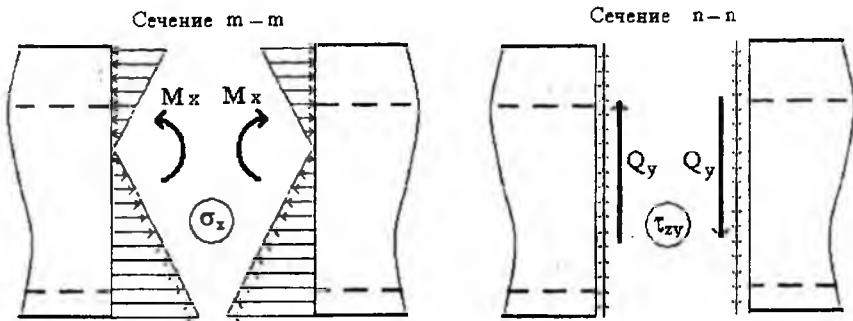


Рис.8

3. Расчет составных сварных балок

В реальных металлических конструкциях часто используются поперечные сечения балок, состоящих из набора прокатных листов и профилей. Для объединения набранных элементов в единый пакет используются различные подходы. В качестве соединительных элементов используются заклепки, болты или сварка. Особенностью расчета составных балок является проверка прочности материала по нормальным и касательным напряжениям, а также прочности соединительных элементов.

Остановимся на сварных соединениях. В составных балках продольные сварные швы обычно делают сплошными и одной толщины. Они рассчитываются на срез по наибольшему сдвигающему усилию.

Наибольшее сдвигающее усилие на уровне продольного сварного шва, приходящееся на 1 см длины шва

$$T = t\psi = \frac{Q_{\max} S_x^{omc}}{J_x}$$

Это сдвигающее усилие воспринимается продольным угловым сварным швом длиной 1 см с рабочей площадью

$$A_{ш} = \delta_{ср} * 1 = 0,7 * h_{ш} * 1 \text{ см}^2,$$

где: $\delta_{ср}$ - наименьшая толщина шва при срезе (рис.9);

$h_{ш}$ - высота (толщина) сварного шва.

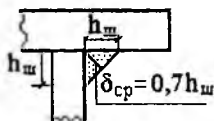


Рис. 9

Условие прочности таких швов на срез имеет вид

$$\tau_{ср} = \frac{T}{A_{ш}} \leq R_{св},$$

где $R_{св}$ - расчетное сопротивление сварного шва на срез.

Откуда можно определить проектную высоту шва

$$h_{ш} = \frac{Q_{\max} S_x^{omc}}{0,7 J_x R_{св}}$$

Если количество соединяющих продольных швов несколько, то соответственно увеличивается площадь среза $A_{ш}$.

Проектная толщина сварного шва назначается кратной целому числу миллиметров (с округлением в большую сторону), но не менее 4 мм.

Пример 4.

Для сварной балки построить эпюры: поперечных сил Q_y , изгибающих моментов M_x :

а) определить значение интенсивности расчетной внешней нагрузки q из условия прочности балки по нормальным напряжениям;

б) проверить прочность балки по касательным напряжениям;

в) определить высоту (толщину) продольных сварных швов $h_{ш}$, соединяющих между собой прокатные элементы поперечного сечения.

Расчет будем вести по методу предельных состояний, приняв: $a = 1,8$ м, коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_p = 1,3$, расчетное сопротивление изгибу материала балки $R_n = 210$ МПа, расчетное сопротивление срезу материала балки $R_{ср} = 130$ МПа, расчетное сопротивление на срез сварного шва $R_{св} = 150$ МПа.

Решение.

На рис.10,а изображена расчетная схема составной балки и построенные методом сечений эпюры внутренних усилий Q_y (рис.10,б) и M_x (рис.10,в) в долях qa и qa^2 . Поперечное сечение балки состоит двух прокатных швеллеров №16 и стального листа с размерами поперечного сечения $18 * 1\text{см}^2$. Геометрические характеристики этого сечения получены в примере 1.

В рассматриваемом случае предполагается решить обратную задачу – определить величину параметра внешней нагрузки q , действующей на балку, из условия прочности по нормальным напряжениям. Это условие, записанное по методу предельных состояний, имеет вид

$$\sigma_s^{\max} = \frac{M_{\text{расч}}^{\max}}{W_x} \leq R_n,$$

где: $M_{\text{расч}}^{\max} = \gamma_p M_x^{\max}$; γ_p - коэффициент надежности по нагрузке;

M_x^{\max} - наибольшее значение внутреннего изгибающего момента, равное наибольшей $M_x = qa^2$;

$R_n = 210$ МПа расчетное сопротивление изгибу;

$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{2364}{10,82} = 218,5 \text{ см}^3$ – момент сопротивления поперечного сечения балки

при изгибе. J_x и y_{\max} вычислены в примере 1.

Условие прочности для рассматриваемого примера примет вид

$$\sigma_s^{\max} = \frac{1,3q \cdot 1,8^2}{218,5 \cdot 10^{-6}} \leq 210 \cdot 10^6, \quad \text{откуда} \quad q = \frac{210 \cdot 218,5}{1,3 \cdot 1,8^2} = 10894 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \approx 10,9 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Затем проверим прочность балки по касательным напряжениям. Для этого вычислим наибольшую расчетную поперечную силу.

$$Q_{расч}^{max} = qa = 10,9 \cdot 1,8 = 19,6 \text{ kH}$$

Следует отметить, что мы имеем интенсивность расчетной нагрузки, поэтому коэффициент надежности по нагрузке не вводим.

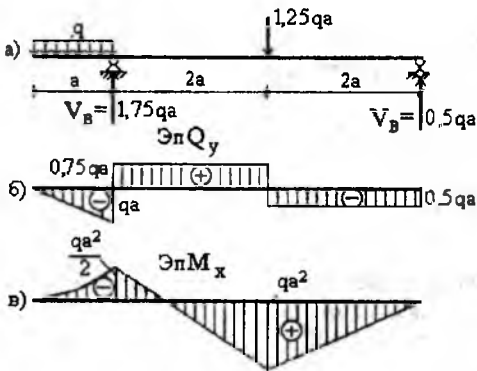


Рис. 10

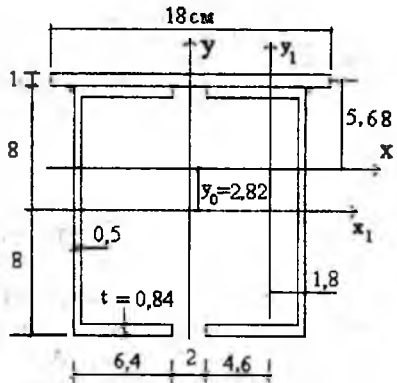


Рис. 11

Проверка на прочность материала балки на сдвиг проводится по формуле Журавского, как правило, для точек поперечного сечения, расположенных на уровне нейтрального слоя, который, как известно, совпадает с центральной осью x .

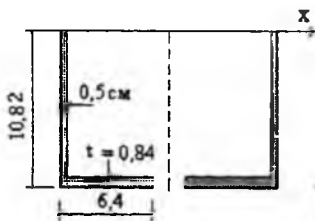


Рис. 12

$$\tau_{max} = \frac{Q_{расч}^{max} S_x^{отс}}{J_x b_y} \leq R_{ср}$$

где: $S_x^{отс}$ - статический момент отсеченной части относительно оси x (рис.12);

J_x - момент инерции всего поперечного сечения относительно оси x ;

b_y - ширина поперечного сечения на уровне оси x .

$$S_x^{отс} = \left[(6,4 \cdot 0,84 \cdot 10,4) + \left(9,98 \cdot 0,5 \cdot \frac{9,98}{2} \right) \right] 2 = 161,6 \text{ см}^3$$

$$\tau_{max} = \frac{19610 \cdot 161,6 \cdot 10^{-6}}{2364 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 0,5} = 13,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 13,4 \text{ МПа} < R_{ср} = 130 \text{ МПа}$$

т.е. прочность балки по касательным напряжениям обеспечена.

Определим высоту (толщину) сварных швов, соединяющих два швеллера с горизонтальным листом в единое целое.

Наибольшее сдвигающее усилие на уровне продольного сварного шва, приходится на 1 см длины шва

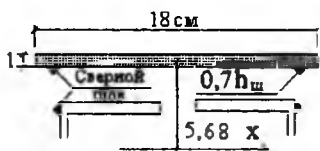


Рис. 13

$$T = q \cdot l = \frac{Q_{\text{стат}} S_x^{\text{отс}}}{J_x}$$

где: $S_x^{\text{отс}}$ - статический момент горизонтального листа относительно оси x (рис.13);

$$S_x^{\text{отс}} = 18 \cdot 1 \cdot 5,68 = 102,24 \text{ см}^3.$$

$$T = \frac{19610 \cdot 102,24 \cdot 10^{-6}}{2364 \cdot 10^{-8}} = 84,81 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Это сдвигающее усилие воспринимается двумя продольными угловыми сварными швами длиной 1 см с рабочей площадью

$$A_{\text{ш}} = 2 \cdot 0,7 \cdot 1 \cdot h_{\text{ш}} = 1,4 h_{\text{ш}},$$

где $h_{\text{ш}}$ - катет (толщина) сварного шва.

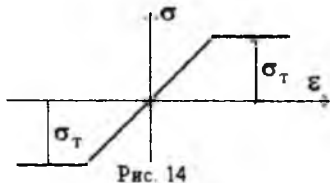
Условие прочности таких швов на срез имеет вид $\tau_{\text{ср}} = \frac{T}{A_{\text{ш}}} \leq R_{\text{ср}}$, откуда

$$h_{\text{ш}} = \frac{T}{1,4 R_{\text{ср}}} = \frac{84,81 \cdot 10^3}{1,4 \cdot 150 \cdot 10^6} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,045 \text{ мм}.$$

Принимаем минимально допустимую по нормам высоту шва, равную $h_{\text{ш}} = 4 \text{ мм}$.

4. Изгиб балок в упруго пластической стадии

Будем считать, что материал балки является упруго пластическим и свойства его описываются идеализированной диаграммой Прандтля. Схематизация состоит в предположении, что материал работает в упругой стадии вплоть до предела текучести, а площадка текучести распространяется неограниченно (рис.14).



Рассмотрим опасное сечение балки, в котором действует наибольший изгибающий момент.

Наибольшие нормальные напряжения в этом сечении будут действовать в наиболее удаленных точках от нейтральной оси. При достижении в них напряжений $\sigma = \sigma_T$ продольные волокна в этих точках будут неограниченно деформироваться при постоянных напряжениях. Обозначим внутренний изгибающий момент, соответствующий

этому состоянию M_T , а параметр нагрузки q_T . При дальнейшем возрастании нагрузки нормальные напряжения в соседних точках по высоте поперечного сечения будут увеличиваться до σ_T .

В предельном случае эпюра нормальных напряжений превратится в ступенчатую эпюру с ординатами $\sigma = (\text{плюс-минус}) \sigma_T$. Состояние сечения, когда во всех точках развиваются пластические деформации, называют пластическим шарниром. В момент образования пластического шарнира нейтральная линия делит поперечное сечение на две равновеликих части. Изгибающий момент в этом случае называется предельным моментом $M_{\text{пред}}$, а соответствующая нагрузка – предельной ($q_{\text{пр}}$).

Пример 5.

Для балки (рис.15) определить положение опасного сечения по нормальным напряжениям:

а) вычислить интенсивность нагрузки q_T , при которой в опасных точках опасного сечения возникают нормальные напряжения равные пределу текучести σ_T .

б) вычислить интенсивность $q_{\text{пр}}$, при которой в опасном сечении образуется пластический шарнир.

в) Определить отношение вычисленных нагрузок $q_{\text{пр}}/q_T$.

Материал балки упруго пластический, его свойства описываются диаграммой Прандтля (рис.14).

Примем $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, $a = 2 \text{ м}$.

Решение.

На рис. 15 показаны балка и построенная методом сечений эпюра изгибающих моментов. Наибольшие нормальные напряжения действуют в сечении с максимальным изгибающим моментом $M = 2qa^2$. Поперечное сечение (рис.16,а) и его геометрические характеристики взяты из примера 1.

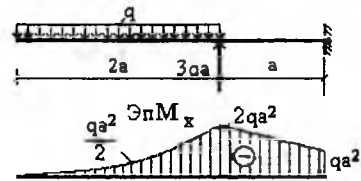


Рис. 15

Изгибающий момент M_T , который в опасных точках опасного сечения вызывает напряжения равные пределу текучести, найдем из условия

$$\sigma_T^{\text{max}} = \frac{M_T}{W_x} \leq \sigma_T, \text{ откуда } M_T = \sigma_m \cdot W_x$$

$$\text{где } W_x = \frac{J_x}{y_{\text{max}}} = \frac{3471}{10,78}$$

С другой стороны изгибающий момент в опасном сечении $M_x = 2qa^2$.

Тогда $M_T = \sigma_T W_x = 2qa^2$, откуда

$$q_T = \frac{\sigma_T W_x}{2a^2} = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 322 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2^2} = 9660 \frac{\text{Н}}{\text{м}} = 9,66 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$$

Определим параметр нагрузки $q_{пр}$ при которой в опасном сечении образуется пластический шарнир. При образовании пластического шарнира нейтральная линия делит площадь поперечного сечения на две равновеликие части

$$A^{раст} = A^{сж} = A/2 = 108/2 = 54 \text{ см}^2.$$

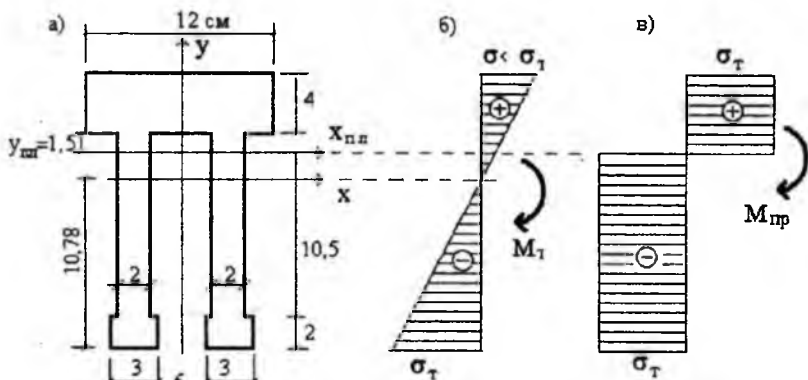


Рис. 16

Из этого условия найдем положение оси $X_{пл}$. $12 \cdot 4 + 2(2 \cdot y_{пл}) = 54$,
откуда $y_{пл} = (54 - 48)/4 = 1,5$ см.

Предельный изгибающий момент определяется относительно оси $X_{пл}$ по выражению

$$M_{пр} = \sigma_T W_{пл},$$

где: $W_{пл} = S_{X_{пл}}^{раст} + S_{X_{пл}}^{сж}$ - пластический момент сопротивления;

$S_{X_{пл}}^{раст}$, $S_{X_{пл}}^{сж}$ - статические моменты растянутой и сжатой частей относительно оси $X_{пл}$, взятые по модулю.

$$W_{пл} = [(12 \cdot 4) 3,5 + 2(1,5 \cdot 2) 0,75] + [2(3 \cdot 2) 11,5 + (2 \cdot 10,5) 5,25] = 531 \text{ см}^2.$$

Приравняв $M_{пр} = \sigma_T W_{пл} = 2 qa^2$ получим

$$q_{пр} = \frac{\sigma_T W_{пл}}{2a^2} = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 531 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2^2} = 15930 \frac{H}{M} = 15,93 \frac{kH}{M}.$$

На рис. 16,б,в приведены эпюры нормальных напряжений σ_z в опасном сечении от действия нагрузок q , и $q_{пр}$.

$$\text{Найдем отношение } \beta = \frac{q_{пр}}{q} = \frac{15,93}{9,66} = 1,65.$$

Коэффициент β показывает, во сколько раз должна возрасти нагрузка, от момента появления текучести в опасной точке опасного сечения, до образования пластического шарнира.

5. Контрольные вопросы

1. Что называется статическим моментом сечения относительно оси. Какова его размерность?
2. По каким формулам определяется положение центра тяжести сечения?
3. Что называется осевым, полярным, центробежными моментами инерции? Какова их размерность?
4. Какие оси называется главными центральными осями инерции и как определяется их положение?
5. Напишите зависимости между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей.
6. Напишите формулы для определения осевых моментов инерции простейших фигур.
7. Каким свойством обладает ось симметрии сечения?
8. Запишите зависимость между центробежными моментами инерции при параллельном переносе осей.
9. Что понимается под осевым моментом сопротивления? Напишите формулы моментов сопротивления для прямоугольного, круглого сечений и тонкостенного кольца.
10. Что называется чистым и поперечным изгибом?
11. Что понимается под законом парности касательных напряжений?
12. Какие напряжения возникают в поперечном сечении балки при поперечном изгибе? Как они определяются? Какие допущения были приняты при выводе этих формул?
13. Для каких точек опасных сечений, как правило, проверяется условие прочности по нормальным и касательным напряжениям при поперечном изгибе.
14. Какой диаграммой описываются свойства материала при изгибе стержня в упруго пластической стадии?
15. Из какого условия определяется положение нейтральной линии в поперечном сечении, где образуется пластический шарнир?
16. Какой вид имеет эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении, где образуется пластический шарнир?

Рекомендованная литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. Учебник для вузов, М., Студент, 2012, 560с
2. Лукьянов А.М. Сопротивление материалов. Учебное пособие, М.,ГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2008, 560с.
3. Лукьянов А.М., Лукьянов М.А, Монахов И.И. Геометрические характеристики плоских сечений,: Учебное пособие.. М.,: МИИТ, 2011
4. Державин Б. П., Лукьянов А. М., Монахов И. И. Построение эпюр внутренних усилий. Методическое указание. М.,: МИИТ, 2008
5. Державин Б. П., Жаринов М.Ю., Лукьянов А. М., Мелешонков Е.И. Расчет стержней на изгиб и кручение. Методическое указание. М., МИИТ, 2007
- 6.Сборник задач по сопротивлению материалов. Учеб. пособие для вузов. Под ред. А.В. Александрова. М., Стройиздат, 1977. 335 с.

Оглавление

1. Геометрические характеристики поперечного сечения стержня при изгибе.....	3
2. Распределение нормальных и касательных напряжений по высоте6 поперечного сечения балки при изгибе	
3. Расчет составных сварных балок	11
4. Изгиб балок в упруго пластической стадии.....	14..
5. Контрольные вопросы	17
6. Литература	18

Учебно-методическое издание

Мелешонков Евгений Иванович, Монахов Игорь Иванович.

Напряжения в поперечных сечениях стержней при изгибе

Методические указания
к выполнению домашнего задания №2/н
по дисциплине «Сопротивление материалов»

Подписано в печать 7,11 Заказ № 232/14 Изд. № 25-14
Тираж 100 экз. Усл. печ. л.
Формат 60x84/16

1150048, г. Ярославль, Московский пр-т, д, 151.
Типография Ярославского филиала МИИТ.