Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Российский университет транспорта (МИИТ)»

Кафедра
“Высшая и вычислительная математика”

О.А.Платонова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЧАСТЬ 7
КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Конспект лекций

Москва - 2017

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Российский университет транспорта (МИИТ)»

Кафедра
“Высшая и вычислительная математика”

О.А.Платонова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЧАСТЬ 7
КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Конспект лекций
для всех специальностей
ИТТСУ

Москва - 2017

УДК 517
П37

Платонова О.А. Математический анализ. Часть 7. Кратные и криволинейные интегралы: Конспект лекций. - М.: РУТ (МИИТ), 2017. – 70 с.

Пособие содержит краткое изложение основных определений и теорем по теме «Кратные и криволинейные интегралы». В пособии рассмотрено много примеров. Пособие предназначено для студентов ИТТСУ.

Рецензенты: к.ф.м.н. Н.С.Петросян, доцент кафедры «Прикладная математика» ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; к.т.н. Л.Ф.Кочнева, зав.кафедрой «Математика» РУТ (МИИТ).

© РУТ (МИИТ), 2017

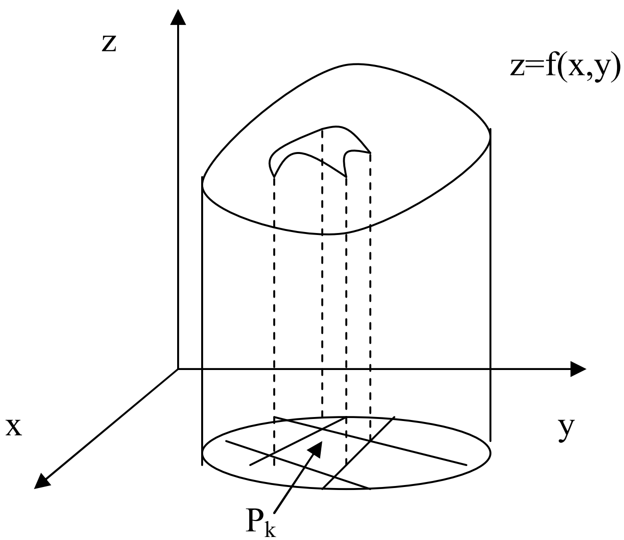
СОДЕРЖАНИЕ

стр.

Кратные интегралы.

§ 1. *Задача об объеме цилиндрического тела*

Пусть в области $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, ограниченной замкнутой кривой $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, определена поверхность $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geq 0$, где $\boldsymbol{f}$ - непрерывна. Пусть $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ имеет площадь. Каков объем цилиндрического тела, ограниченного снизу областью $\boldsymbol{D}$, а сверху поверхностью $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geq 0$?



Разобьем $D(x, y)$ на n частей (элементарных областей δ_k), имеющих площадь $\Delta\sigma_k$. Обозначим диаметр области δ_k через d_k.

Пусть m и M наименьшее и наибольшее значение $z = f(x, y)$ в области D, а m_k и M_k - в области δ_k.

$$m_k \cdot \Delta\sigma_k \le f(x, y) \cdot \Delta\sigma_k \le M_k \cdot \Delta\sigma_k$$

Обозначим

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta\sigma_k$$

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta\sigma_k$$

Построим

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot \Delta\sigma_k \quad \Rightarrow \quad w_n \le V_n \le W_n$$

При $\max d_k \to 0 \quad w_n \to V_n$ и $W_n \to V_n$

$$\Rightarrow \lim_{\max d_k \to 0} V_n = V = \lim_{\max d_k \to 0} f(P_k)\cdot\Delta\sigma_k$$

Определение. Объемом цилиндрического тела называется предел объема ступенчатого тела V_n, составленного из элементарных цилиндров, когда наибольший из диаметров их оснований стремится к нулю.

§2. Определение двойного интеграла

Пусть на плоскости ***x0y*** задана замкнутая область $D(x,y)$, имеющая конечную площадь и диаметр ***d***. В области $D(x,y)$ задана непрерывная функция $z = f(x,y)$, ***m*** и ***M*** ее наименьшее и наибольшее значения в области ***D.***

Разобьем $D(x,y)$ произвольным образом на ***n*** элементарных областей δ_k с площадями $\Delta\sigma_k$ и диаметрами d_k.

В каждой области δ_k выберем точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$ и составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta\sigma_k$$

Определение. Двойным интегралом $\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$ от функции $z = f(x, y)$ по замкнутой области D, имеющей конечную площадь и конечный диаметр, называется предел интегральной суммы

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} S_n =$$

$$= \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{k=n} f(P_k) \cdot \Delta\sigma_k$$

если этот предел не зависит от способа разбиения области D и от выбора точек P_k.

Теорема (о существовании двойного интеграла).

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна, а D - замкнутая область с конечной площадью и диаметром, то $\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$ существует.

Геометрический смысл двойного интеграла

1.Двойной интеграл по области $\boldsymbol{D}$ от неотрицательной в этой области функции равен объему цилиндрического тела, ограниченного снизу областью $\boldsymbol{D}$, а сверху поверхностью $z = f(x, y) \geq 0$

$$\iint\limits_{D} f(x, y) d\sigma = V \quad \left(f(x, y) \geq 0 \text{ в } D \right)$$

2. Двойной интеграл по области $\boldsymbol{D}$ от единицы (от $d\sigma$) равен площади области $\boldsymbol{D}$.

$$\iint\limits_{D} d\sigma = S_D \quad \left(f(x, y) \equiv 1 \right)$$

§3. Основные свойства двойного интеграла

1^0. $\iint\limits_{D} C \cdot f(x, y) d\sigma = C \cdot \iint\limits_{D} f(x, y) d\sigma$

2^0. Линейность

$$\iint\limits_{D} \left(\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y) \right) d\sigma =$$

$$= \alpha \cdot \iint\limits_{D} f(x, y) d\sigma + \beta \cdot \iint\limits_{D} g(x, y) d\sigma$$

3^0. $\iint\limits_D C \cdot d\sigma = C \cdot S_D$

4^0. Аддитивность

Если $D = D_1 \cup D_2$, $\quad D_1 \cap D_2 = \varnothing$, тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

5^0. $f(x,y) \geq 0 \quad \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \geq 0$

$f(x,y) \leq 0 \quad \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq 0$

6^0.

$$f(x,y) \leq g(x,y) \quad \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$$

7^0. $\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$

Теорема (о среднем значении двойного интеграла).

Двойной интеграл от произведения двух непрерывных функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$, одна из которых (например, ***g(x,y)***) знакопостоянна, равен интегралу от знакопостоянного сомножителя, умноженному на значение второго сомножителя в некоторой точке $P_0(x_0, y_0) \in D$

$$\iint\limits_{D} f(x,y) \cdot g(x,y) d\sigma = f(P_0) \iint\limits_{D} g(x,y) d\sigma$$

Доказательство. Пусть для определенности функция ***g(x,y)*** знакоположительна. Любая непрерывная функция ограничена в замкнутой области, поэтому

$$m \le f(x,y) \le M \text{ в области } D.$$

Это неравенство можно умножить на ***g(x,y)***. Эта функция знакоположительна, поэтому знаки неравенств сохранятся

$$\Rightarrow \quad m \cdot g(x,y) \le f(x,y) \cdot g(x,y) \le M \cdot g(x,y)$$

Согласно свойствам двойного интеграла при интегрировании знак неравенства сохраняется

$$\Rightarrow \quad m \cdot \iint\limits_{D} g(x, y)d\sigma \le$$

$$\le \iint\limits_{D} f(x, y) \cdot g(x, y)d\sigma \le M \cdot \iint\limits_{D} g(x, y)d\sigma$$

$$\Rightarrow \quad \iint\limits_{D} f(x, y) \cdot g(x, y)d\sigma = \mu \cdot \iint\limits_{D} g(x, y)d\sigma,$$

где $\mu \in [m; M]$.

Согласно теореме Коши

$$\exists \quad P_0(x_0, y_0) \in D: \quad f(P_0) = \mu \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \iint\limits_{D} f(x, y) \cdot g(x, y)d\sigma = f(P_0) \cdot \iint\limits_{D} g(x, y)d\sigma$$

Следствие.

$$g(x, y) \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \iint\limits_{D} f(x, y) \cdot d\sigma = f(P_0) \cdot S_D$$

§4. Вычисление двойного интеграла

Пусть $z = f(x, y)$ - непрерывная неотрицательная функция. Граница области $D(x, y)$, граница которой - $\mathcal{L}$ пересекается любой прямой, параллельной ***0y*** не более чем в двух точках.

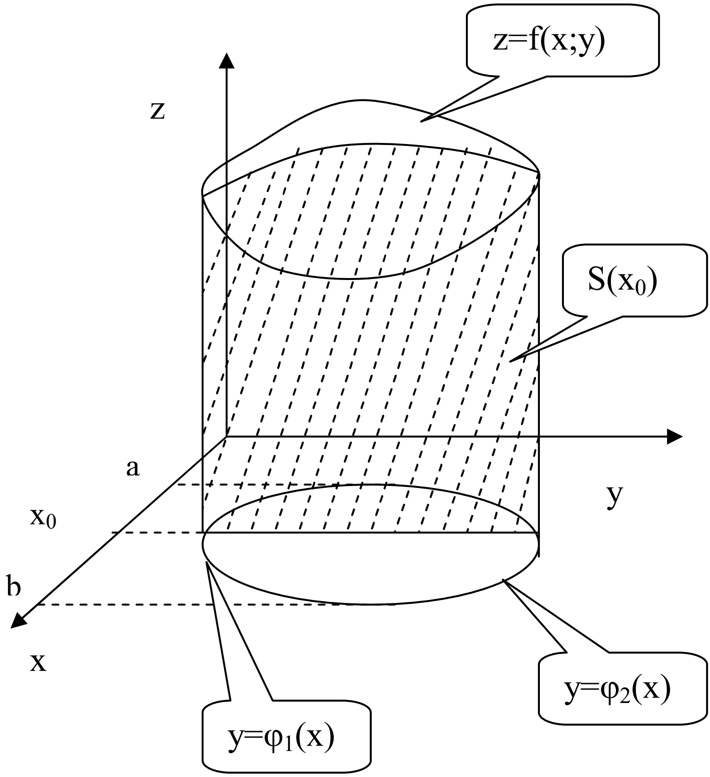
Рассмотрим сечение цилиндрического тела, ограниченного снизу областью ***D***, а сверху поверхностью $z = f(x, y) \geq 0$ плоскостью $x = x_0$. Обозначим площадь этого сечения $S(x_0)$. Граница области ***D*** может быть разбита на две кривые, одна из которых задается уравнением $y=\varphi_1(x)$ (левая на картинке), а другая (правая) $y=\varphi_2(x)$.

Тогда:

$$S(x_0) = \int\limits_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) \cdot dy$$

$$\iint\limits_D f(x, y) d\sigma =$$

$$= V = \int\limits_a^b S(x) \cdot dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x, y) \cdot dy$$



Аналогично, $V = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\psi_1(x_0)}^{\psi_2(x_0)} f(x,y) \cdot dx$

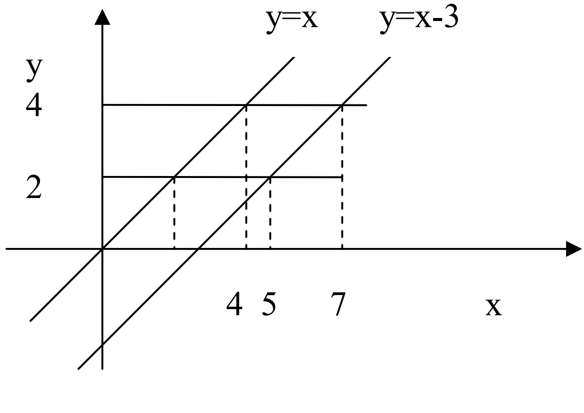
Для произвольной области применяется свойство аддитивности.

Примеры.

1^0. Свести двойной интеграл к повторному.

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,d\sigma,$$

где D: $\begin{matrix} y = x & y = x - 3 \\ y = 2 & y = 4 \end{matrix}$



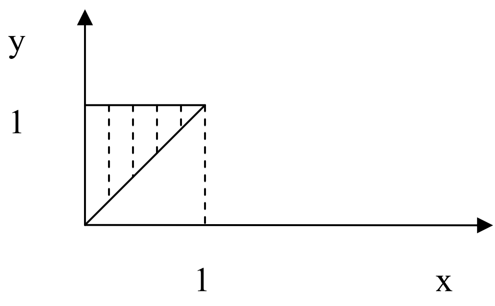
$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{y}^{y+3} f(x,y)dx =$$

$$= \int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{2}^{x} f(x,y)dy +$$

$$+ \int\limits_{4}^{5} dx \int\limits_{2}^{4} f(x,y)dy + \int\limits_{5}^{7} dx \int\limits_{x-3}^{x} f(x,y)dy$$

2^0. Вычислить

$\iint\limits_{D} y \cdot dxdy$, где D: $y = x$ $x = 0$ $y = 1$



$$\iint\limits_{D} y \cdot dxdy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{1} y \cdot dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\left. \frac{y^2}{2} \right|_{x}^{1} \right) dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left. \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \right|_{0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

3^0. Вычислить объем шара радиуса $\boldsymbol{R}$.

Уравнение сферы радиуса $\boldsymbol{R}$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Проекцией шара на плоскость xOy является круг

$$x^2 + y^2 \le R^2.$$

Обозначим V_1 объем восьмой части шара, расположенной в первом октанте, а $\boldsymbol{D}$ – четверть круга, расположенную в первой четверти. Тогда:

$$V = 8V_1 = 8 \cdot \iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy =$$

$$= 8 \cdot \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dy =$$

$$= 8 \cdot \int_0^R dx \left(\frac{y}{2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{R^2 - x^2}{2} \arcsin \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= 4 \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^R \left(R^2 - x^2 \right) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

§5. Преобразование переменных в двойном интеграле

Иногда при вычислении двойного интеграла возникают трудности, которые можно избежать, перейдя к новым координатам.

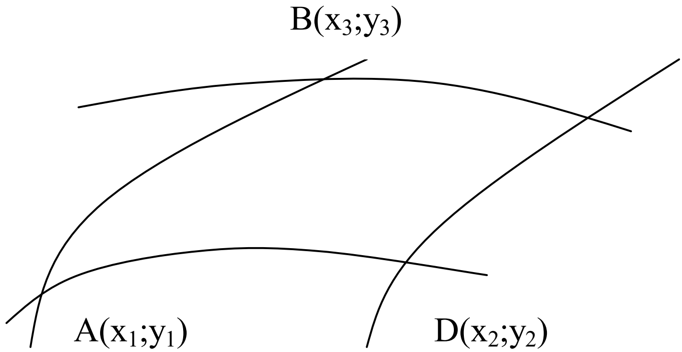
$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} u = \Phi(x, y) \\ v = \Psi(x, y) \end{cases}$$

Пусть φ и ψ имеют непрерывные производные в области G и определитель Якоби (Якобиан) отличен от нуля

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi'_u(u,v) & \varphi'_v(u,v) \\ \psi'_u(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists$$ обратное

преобразование $\begin{cases} u = \Phi(x, y) \\ v = \Psi(x, y) \end{cases}$

Разобьем G параллельными прямыми на области g_{kl}. Этому разбиению соответствует разбиение D на четырехугольники с площадью $\Delta\sigma_{kl}$ ($\approx$ параллелограммы).



$$\Delta\sigma_{kl} \approx \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \varphi(D) - \varphi(A) & \psi(D) - \psi(A) \\ \varphi(B) - \varphi(A) & \psi(B) - \psi(A) \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \varphi'_u \Delta u_k & \psi'_u \Delta u_k \\ \varphi'_v \Delta v_l & \psi'_v \Delta v_l \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \Delta u_k \Delta v_l = |J| \Delta u_k \Delta v_l$$

Таким образом, интегральная сумма принимает вид:

$$\sum_{k,l=1}^{n} f(x_k, y_l)\Delta\sigma_{kl} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} f\big(\varphi(u_{kl}, v_{kl}), \psi(u_{kl}, v_{kl})\big)|J|\Delta\sigma_{kl}$$

$$\Rightarrow \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{G} f\big(\varphi(u, v), \psi(u, v)\big)|J|dudv$$

§6. Переход к полярной системе координат

Переход к полярной системе координат – наиболее часто осуществляемая замена системы координат. Выведем Якобиан перехода от декартовой системы координат к полярной.

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi \\ y = \rho\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad J = \begin{vmatrix} \sin\varphi & \rho\cos\varphi \\ \cos\varphi & \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

$$\Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi =$$

$$= \iint\limits_G \widetilde{f}(\rho,\varphi)\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

Пример.

Вычислить интеграл

$\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy$, где D: $x^2 + y^2 \leq r^2$

Если область интегрирования является кругом или частью круга, полезно перейти в полярную систему координат.

$$\iint\limits_{D} e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{\rho\le r} e^{\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r} e^{\rho^2}\,\rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2} e^{\rho^2} \Big|_0^r \right) =$$

$$= \frac{e^{r^2} - 1}{2} \cdot 2 \cdot \pi = \pi \left(e^{r^2} - 1 \right)$$

§7. Приложения двойного интеграла

Статический момент и центр тяжести неоднородной плоской пластины

Пусть $\mu(x, y)$ - переменная плотность – непрерывная функция.

$$m = \iint\limits_{D} \mu(x, y)\,dxdy$$

Разобьем область D на области d_k. Выберем в них точки $P_k(\xi_k, \eta_k)$.

Тогда

$$S_{ox} \approx \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \cdot \eta_k \cdot \Delta\sigma_k$$

$$\Rightarrow$$

$$S_{oy} \approx \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \cdot \xi_k \cdot \Delta\sigma_k$$

$$S_{ox} = \iint_D \mu(x, y) y \cdot d\sigma$$

$$\Rightarrow$$

$$S_{oy} = \iint_D \mu(x, y) x \cdot d\sigma$$

Отсюда координаты центра тяжести плоской неоднородно пластины будут находиться по формулам:

$$x_{\text{ц.т.}} = \frac{\iint\limits_D \mu(x, y) x \cdot d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x, y) \cdot d\sigma}$$

$$y_{\text{ц.т.}} = \frac{\iint\limits_D \mu(x, y) y \cdot d\sigma}{\iint\limits_D \mu(x, y) \cdot d\sigma}$$

Моменты инерции

Обозначим моменты инерции плоской неоднородной пластина относительно осей координат соответственно I_{ox} и I_{oy}. Аналогично, получаем формулы:

$$I_{ox} \approx \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \cdot \eta_k^2 \cdot \Delta\sigma_k$$

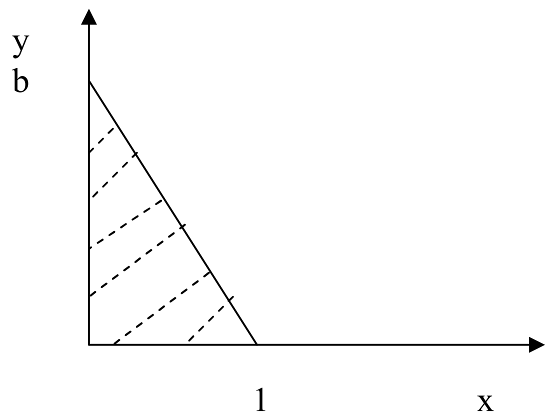
$$I_{oy} \approx \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) \cdot \xi_k^2 \cdot \Delta\sigma_k \quad \Rightarrow$$

$$I_o = I_{ox} + I_{oy}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} I_{ox} &= \iint\limits_{D} \mu(x,y)\, y^2 \cdot d\sigma \\ I_{oy} &= \iint\limits_{D} \mu(x,y)\, x^2 \cdot d\sigma \\ I_{o} &= \iint\limits_{D} \mu(x,y)\left(x^2 + y^2\right) \cdot d\sigma \end{aligned}$$

Примеры.

1^0. Найти массу пластины, ограниченной прямыми y = 0; x = 0; y = b(a-x), плотность которой $\mu(x,y) = x$.



$$m = \iint\limits_D x\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^a x \cdot dx \int\limits_0^{b(a-x)} dy = \int\limits_0^a x\bigl(b(a-x)-0\bigr)\cdot dx =$$

$$= b\int\limits_0^a \left(ax - x^2\right)\cdot dx = b\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3 b}{6}.$$

2^0. Найти координаты центра тяжести пластины: $y = 0$ $y = 1 - x^2$, если $\mu(x, y) = y$

$$m = \iint\limits_D y\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{1-x^2} y \cdot dy = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\left(1 - x^2\right)^2}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

$$S_x = \iint\limits_D y^2 dxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} y^2 \cdot dy == \int\limits_{-1}^{1} dx \frac{\left(1-x^2\right)^3}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(x - x^3 + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{32}{105}.$$

$$S_y = \iint\limits_D xdxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} xdx \int\limits_{0}^{1-x^2} dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \cdot x \cdot \left(1-x^2\right) = 0$$

(так как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю.)

$$x_{\text{ц.т.}} = 0 \qquad y_{\text{ц.т.}} = \frac{32 \cdot 15}{105 \cdot 8} = \frac{4}{7}$$

Площадь поверхности

Пусть Q – участок поверхности $z = f(x, y)$, лежащей над областью $D(x, y)$.

$z = f(x, y)$– непрерывна в $D(x, y)$ и имеет непрерывные частные производные.

В этом случае в каждой точке существует касательная плоскость и нормаль к поверхности, и они непрерывно меняются при движении точки по поверхности.

Разобьем Q на области δ_k с площадью $\Delta\sigma_k$ и диаметром d_k.

Покроем поверхность “чешуйками” – частями касательных плоскостей Δt_k, лежащими над δ_k и построенными в точке P_k. Тогда площадь поверхности приблизительно равна сумме площадей касательных плоскостей («чешуек»)

$$Q \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k .$$

Определение.

Площадью поверхности $\boldsymbol{Q}$ называется предел $\boldsymbol{Q} = \lim\limits_{\max \boldsymbol{d_k} \to 0} \sum\limits_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \Delta \boldsymbol{t_k}$, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек $\boldsymbol{P_k}$.

Из курса стереометрии известно, что площадь проектируемой на плоскость фигуры $\boldsymbol{S}$ и площадь проекции $\boldsymbol{S^1}$ связаны соотношением:

$$\boldsymbol{S}^1 = \boldsymbol{S} \cos \varphi,$$

где φ – линейный угол между плоскостью, в которой лежит фигура и плоскостью проекции.

Следовательно,

$$\Delta \sigma_{\boldsymbol{k}} = \Delta \boldsymbol{t_k} \cdot \cos \gamma_{\boldsymbol{k}}$$

$$\cos \gamma_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^2 \Bigg|_{\boldsymbol{P_k}} + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^2 \Bigg|_{\boldsymbol{P_k}}}}$$

$$\Rightarrow \Delta t_k = \frac{\Delta\sigma_k}{\cos\gamma_k} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\Bigg|_{P_k} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\Bigg|_{P_k}}\,\Delta\sigma_k$$

$$\boxed{\Rightarrow Q = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, d\sigma}$$

§8. Тройной интеграл

Масса неоднородного тела

Пусть плотность тела V переменная величина $\mu = \mu(x, y, z)$ - непрерывная функция. Разобьем V на маленькие кусочки объема V_k. Выберем в каждом кусочке точку P_k.

Тогда $m \approx \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k)\cdot \Delta V_k$.

$\Rightarrow \quad m = \lim\limits_{\max d_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k)\cdot \Delta V_k$, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения и выбора точек P_k.

Определение. Тройным интегралом $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ от непрерывной в области V функции $z = f(x,y,z)$, где V имеет конечный диаметр и объем, называется $\lim\limits_{\max d_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta V_k$, если он не зависит от способа разбиения и выбора точек P_k.

Итак: $m = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)dV$.

Свойства и способ вычисления тройного интеграла аналогичны свойствам и способу вычисления двойного интеграла.

Пусть поверхность, ограничивающая тело V, пересекается прямыми, параллельными $0z$ не более чем в двух точках. Тогда нижняя часть поверхности - $z = \varphi_1(x,y)$, верхняя - $z = \varphi_2(x,y)$

$$\Delta V_k = \Delta\sigma_k \cdot \Delta z_k$$

$$\Rightarrow \quad \iiint\limits_V f(x,y,z)dV =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)\cdot \Delta z_k \cdot \Delta\sigma_k =$$

$$= \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f\left(\xi_k,\eta_k,z\right)\cdot dz \right) d\sigma =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\cdot dz$$

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = x^2 + y^2$$

$$z = 2x^2 + 2y^2$$

$$y = x^2$$

$$y = x$$

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(x^2 + y^2\right) dy = \int_0^1 dx \cdot \left(x^2 + y^2\right)\Big|_{x^2}^{x} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = \frac{35 - 21 - 5}{105} = \frac{9}{105} = \frac{3}{35}$$

§9. Замена переменных в тройном интеграле

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx \cdot dy \cdot dz =$$

$$= \iiint_{V^*} f\left(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right) |J|\, du \cdot dv \cdot dw$$

$$\boldsymbol{J}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{u}}\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{v}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{v}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{v}}\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{w}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{w}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{w}}\end{vmatrix}$$

В частности:

1) Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}=\rho\cos\varphi\\ \boldsymbol{y}=\rho\sin\varphi\\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{J}=\begin{vmatrix}\rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho$$

$$\Rightarrow \quad \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dV =$$

$$= \iiint\limits_{V^*} f^*(\rho,\varphi,z)\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\varphi\cdot dz$$

2) Сферическая система координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad J = -\rho^2\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dV =$$

$$= \iiint\limits_{V^*} f^*(\varphi,\theta,\rho)\cdot\rho^2\sin\theta\cdot d\varphi\cdot d\theta\cdot d\rho$$

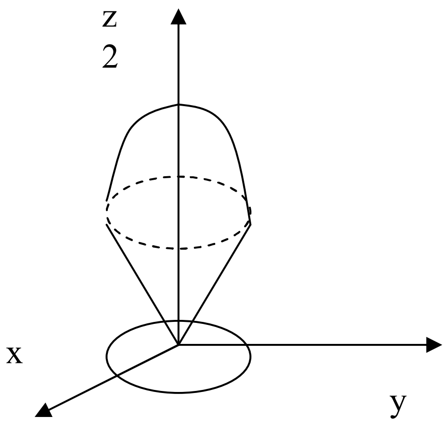
Пример.

1^0. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$z = 2 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$z > 0$$



Так как тело проектируется на плоскость xOy и круг радиуса 1, полезно перейти в цилиндрическую систему координат.

$$x = \rho\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi$$

$$z = z$$

В силу симметрии можно рассмотреть часть тела, расположенную над первой четвертью, и умножить соответствующий интеграл на 4.

$$\boldsymbol{V}=\iiint\limits_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{dx}\cdot\boldsymbol{dy}\cdot\boldsymbol{dz}=4\iiint\limits_{\boldsymbol{V}_1}\boldsymbol{dx}\cdot\boldsymbol{dy}\cdot\boldsymbol{dz}=$$

$$=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{d}\varphi\int\limits_{0}^{1}\rho\cdot\boldsymbol{d}\rho\int\limits_{\rho}^{2-\rho^2}\boldsymbol{dz}=$$

$$=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{d}\varphi\int\limits_{0}^{1}\rho\left(2-\rho^2-\rho\right)\cdot\boldsymbol{d}\rho=$$

$$=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{d}\varphi\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=2\pi\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$$

§10. Интеграл Пуассона

Интегралом Пуассона называют интегралы вида

$$\int\limits_{0}^{\infty}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{dx},\qquad\int\limits_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{dx},\quad\int\limits_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{e}^{\frac{-\boldsymbol{x}^2}{2}}\boldsymbol{dx}.$$

Первообразную для подинтегральной функции найти нельзя (неберущийся интеграл). Поэтому для вывода значений этих несобственных интегралов:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

рассмотрим двойной интеграл

$$\iint_{R^2} e^{-x^2-y^2} dx \cdot dy$$

1) С одной стороны этот интеграл является пределом двойного интеграла

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{a} e^{-x^2-y^2}\,dx\cdot dy =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = K^2$$

2) С другой стороны в этом интеграле можно перейти в полярную систему координат. Обозначим D_ρ круг радиуса ρ. Тогда

$$\iint_{R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\cdot dy =$$

$$= \lim_{\rho\to\infty}\iint_{D_\rho} e^{-r^2}\,r\cdot dr\cdot d\varphi =$$

$$= \lim_{\rho\to\infty}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\rho} e^{-r^2}\,r\cdot dr =$$

$$= \lim_{\rho\to\infty} \iint\limits_{D_\rho} e^{-r^2} r \cdot dr \cdot d\varphi =$$

$$= \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho} e^{-r^2} r \cdot dr =$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{\rho} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\rho\to\infty} (1 - e^{-\rho^2}) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \pi.$$

Отсюда получаем, что $K = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Остальные интегралы получаются из выведенного заменой переменных.

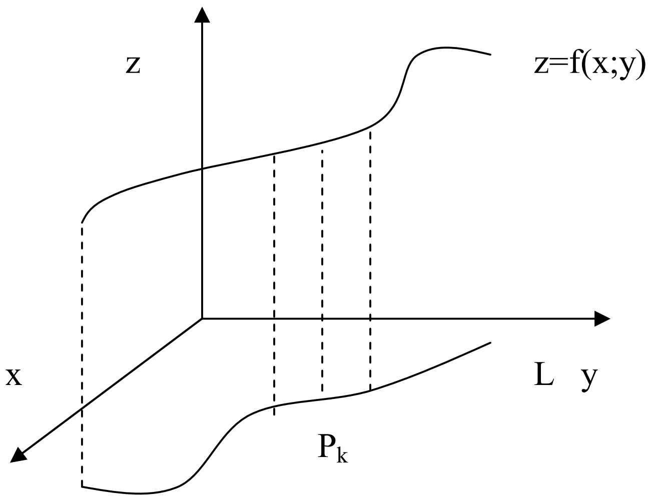
§11. Таблица приложений кратных интегралов

Площадь плоской фигуры	$\iint\limits_D dx \cdot dy$
Площадь куска поверхности	$\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx \cdot dy$
Объем цилиндрическог о тела	$\iint\limits_D z \cdot dx \cdot dy$
Момент инерции плоской фигуры относительно ***0Z***	$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) \cdot dx \cdot dy$
Момент инерции плоской фигуры относительно ***0X***	$\iint\limits_D y^2 \cdot dx \cdot dy$

Координаты центра тяжести плоской пластины	$$x_{\text{ц.т.}} = \frac{\iint\limits_{D} x \cdot \mu(x, y) \cdot dx \cdot dy}{\iint\limits_{D} \mu(x, y) \cdot dx \cdot dy}$$ $$y_{\text{ц.т.}} = \frac{\iint\limits_{D} y \cdot \mu(x, y) \cdot dx \cdot dy}{\iint\limits_{D} \mu(x, y) \cdot dx \cdot dy}$$
Объем тела	$$\iiint\limits_{V} dV$$
Масса тела	$$\iiint\limits_{V} \mu(x, y, z) dV$$
Координаты центра тяжести	$$x_c = \frac{\iiint\limits_{V} x \cdot \mu(x, y, z) dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint\limits_{V} \mu(x, y, z) dx \cdot dy \cdot dz}$$

§12. Криволинейный интеграл I-го рода (по длине дуги)

Пусть в некоторой области $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ задана непрерывная функция $\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})$, в точках которой определена функция $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, также непрерывная.



Разобьем спрямляемую дугу на элементы Δl_k. Выберем точку P_k в каждом из них и составим сумму $\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot \Delta l_k$.

Если существует предел $\lim\limits_{\max \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot \Delta l_k$, который не зависит от способа разбиения кривой и от выбора точек P_k, то он называется криволинейным интегралом I–го рода.

$$\int_L f(x, y)dl = \int_L f(x, y)\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx$$

Геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода

Площадь цилиндрической поверхности (забора).

Механический смысл криволинейного интеграла первого рода

$f(x, y) = \gamma(x, y)$ - плотность

$$\Rightarrow \int\limits_L \gamma(x, y)dl = m$$ (масса неоднородной дуги).

Если кривая задана в пространстве, то

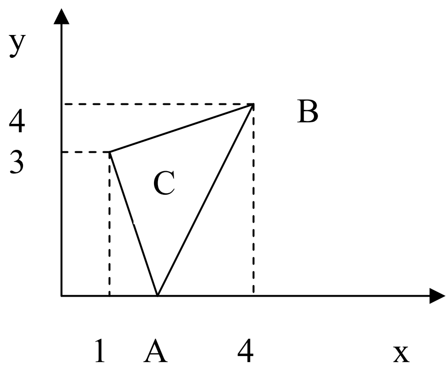
$$\int\limits_L f(x, y, z)dl =$$

$$= \int\limits_L f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt$$

Примеры.

1) Вычислить интеграл $\int\limits_L (x + y)dl$, где

L=AB∪BC∪CA



$$\begin{cases} AB: y = 2(x-2) \\ BC: y = \dfrac{1}{3}(x+8) \\ CA: y = -3(x-2) \end{cases}$$

$$\int\limits_{L} (x+y)dl = \int\limits_{AB} (x+y)dl +$$

$$+ \int\limits_{BC} (x+y)dl + \int\limits_{CA} (x+y)dl =$$

$$= \int_{2}^{4} (x+2x-4)\sqrt{1+4}\,dx +$$

$$+ \int_{1}^{4} \left(x + \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \right) \frac{\sqrt{10}}{3} dx +$$

$$+ \int_{1}^{2} (x-3x+6)\sqrt{10}\,dx =$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{3}{2}x^2 - 4x \right)\Bigg|_2^4 + \frac{\sqrt{10}}{3}\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x \right)\Bigg|_1^4 +$$

$$+ \sqrt{10}\left(-x^2 + 6x \right)\Big|_1^2 =$$

$$= 10\sqrt{5} + 6\sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 10\sqrt{5} + 9\sqrt{10}$$

2) Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2+y^2}$, где L- один виток винтовой линии

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = at \end{cases} \qquad t\in[0;\ 2\pi].$$

$$\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2}{a^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} \sqrt{a^2+a^2}\, dt =$$

$$= a\sqrt{2}\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{2}a}{3}\pi^3.$$

§13. Криволинейный интеграл II -го рода (Работа переменной силы на криволинейном пути)

Пусть в каждой точке $M(x, y, z)$ некоторой пространственной области D на материальную точку действует сила $\overline{F}$ с непрерывными координатами

$$\overline{F} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}.$$

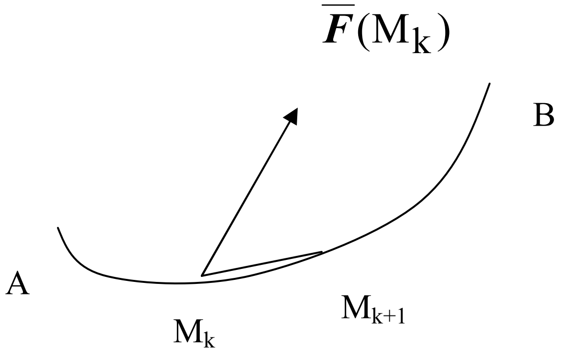
В этом силовом поле рассмотрим гладкую кривую

$$AB \quad : \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t_0 \le t \le T$$

Причем точка $M(x, y, z)$ двигается от A к B (направленная дуга) при монотонном изменении параметра t от t_0 до T.

Разобьем $[t_0, T]$ на отрезки $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Это разбиение повлечет за собой разбиение кривой AB на части точками $M_k(x(t_k); y(t_k); z(t_k))$.



Работу переменной силы по перемещению материальной точки из M_k в M_{k+1} обозначим ΔA_k. Тогда

$$\Delta A_k \approx \overline{F}(M_k)\cdot\overline{M_k M_{k+1}} =$$

$$= P\big|_{M_k}\Delta x_k + Q\big|_{M_k}\Delta y_k + R\big|_{M_k}\Delta z_k$$

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k$$

$$A = \lim_{\max \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \big(P(M_k)\Delta x_k +$$

$$+ Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k\big) =$$

$$= \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

Определение.

Криволинейным интегралом II -го рода вектора $\bar{a} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ по направленной дуге AB называется

$$\lim_{\max \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} (P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + + R(M_k)\Delta z_k),$$

если он не зависит от способа разбиения кривой и выбора точек M_k.

Способ вычисления криволинейного интеграла второго рода

Способ вычисления криволинейного интеграла второго рода состоит в сведении его к определенному интегралу и определяется способом задания кривой AB.

Если кривая AB задана параметрически, то

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \left(P \cdot x' + Q \cdot y' + R \cdot z'\right)dt = \int\limits_{AB} \overline{a} \cdot \overline{dl}$$

§14. Свойства криволинейного интеграла II -го рода

1^0. $\int\limits_{AB} \overline{a} \cdot \overline{dl} = - \int\limits_{BA} \overline{a} \cdot \overline{dl}$

2^0. $\int\limits_{AB} \overline{a} \cdot \overline{dl} = \int\limits_{AM_1} \overline{a} \cdot \overline{dl} + \int\limits_{M_1M_2} \overline{a} \cdot \overline{dl} + \cdots + \int\limits_{M_kB} \overline{a} \cdot \overline{dl}$

3^0. $\int\limits_{AB} \left(\alpha \overline{a} + \beta \overline{b}\right) \cdot \overline{dl} = \alpha \int\limits_{AB} \overline{a} \cdot \overline{dl} + \beta \int\limits_{AB} \overline{b} \cdot \overline{dl}$

Примеры.

1) Вычислить $\int\limits_{L} (4 - y)dx + (y - 2)dy$, где L первая арка циклоиды

$$x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t)$$

$$\int\limits_{L}(4-y)dx+(y-2)dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{2\pi}\big[(4-2+2\cos t)\cdot 2\cdot(1-\cos t)+$$

$$+(2-2\cos t-2)\cdot 2\cdot \sin t\big]dt=$$

$$=2\int\limits_{0}^{2\pi}\left[2\left(1-\cos^2 t\right)-2\sin t\cdot\cos t\right]dt=$$

$$=4\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}-\sin 2t\right)dt=$$

$$=(2t-\sin 2t+2\cos 2t)\Big|_{0}^{2\pi}=4\pi.$$

2) Вычислить $I = \int\limits_{AB} xy \cdot dx + (y - x)dy$, где $A(1,1), B(3,4), C(3,1)$

а) по прямой AB: $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

б) по параболе AB: $y = \frac{5}{2}x^2 - \frac{17}{2}x + 7$

б) по ломаной ACB

а) $$I = \int_1^3 \left[x\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - x\right) \cdot \frac{3}{2} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x \Big|_1^3 =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{1}{2} + \frac{9}{8} - \frac{1}{8} - \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 12{,}5$$

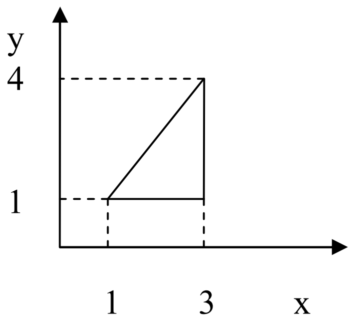
$$б)\boldsymbol{I} = \int\limits_1^3 \left[\boldsymbol{x}\left(\frac{5}{2}\boldsymbol{x}^2 - \frac{17}{2}\boldsymbol{x} + 7\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{5}{2}\boldsymbol{x}^2 - \frac{19}{2}\boldsymbol{x} + 7\right) \cdot \left(5\boldsymbol{x} - \frac{17}{2}\right)\right] \boldsymbol{dx} =$$

$$= \int\limits_1^3 \left[15\boldsymbol{x}^3 - \frac{309}{4}\boldsymbol{x}^2 + \frac{491}{4}\boldsymbol{x} - \frac{119}{2}\right] \boldsymbol{dx} =$$

$$= \frac{15}{4}\boldsymbol{x}^4 - \frac{309}{12}\boldsymbol{x}^3 + \frac{491}{8}\boldsymbol{x}^2 - \frac{119}{2}\boldsymbol{x}\Bigg|_1^3 = 2{,}5$$

в)



$$\boldsymbol{I} = \int\limits_1^3 \boldsymbol{x} \cdot 1\,\boldsymbol{dx} + \int\limits_1^4 (\boldsymbol{y} - 3)\,\boldsymbol{dy} =$$

$$= \left.\frac{\boldsymbol{x}^2}{2}\right|_1^3 + \left.\left(\frac{\boldsymbol{y}^2}{2} - 3\boldsymbol{y}\right)\right|_1^4 =$$

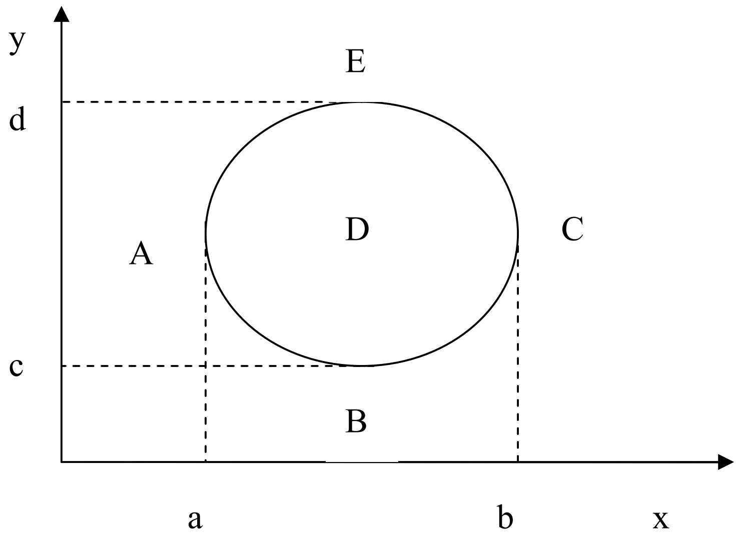
$$= 4 - 4 + 3 - \frac{1}{2} = 2{,}5.$$

§15. Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру и двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром.

Определение. Область называется односвязной, если в ней всякий замкнутый контур может быть стянут в точку этой области с помощью непрерывной деформации, не пересекая при этом границы области.

Предположим, что контур $\mathcal{L}$ кусочно-гладкий, ориентированный по правилу левой руки, а прямые, параллельные осям координат, пересекают его не более чем в двух точках.



Рассмотрим $\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их частные производные непрерывны в области D.

$$\cup ABC: \quad y=\varphi_1(x) \quad \cup BCE: \quad x=\psi_2(y)$$
$$\cup AEC: \quad y=\varphi_2(x) \quad \cup BAE: \quad x=\psi_1(y)$$

Тогда

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$
$$=\oint_L P(x,y)dx+\oint_L Q(x,y)dy=$$

$$=\left\{\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx+\int_b^a P(x,\varphi_2(x))dx\right\}+$$

$$+\left\{\int_c^d Q(\psi_2(y),y)dy+\int_d^c Q(\psi_1(y),y)dy+\right\}=$$

$$=-\left\{\int_a^b P(x,\varphi_2(x))dx-\int_a^b P(x,\varphi_1(x))dx\right\}+$$
$$+\left\{\int_c^d Q(\psi_2(y),y)dy-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)dy+\right\}=$$

$$= \int\limits_c^d Q(x,y)\ \Bigg|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy - \int\limits_a^b P(x,y)\ \Bigg|_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx =$$

$$= \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad \Rightarrow$$

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Следствие.

$$S_D = \oint\limits_L x \cdot dy = -\oint\limits_L y \cdot dx = \frac{1}{2} \oint\limits_L x \cdot dy - y \cdot dx$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_L (2xy - y) \cdot dx + x^2 dy,$$

где L: $x^2 + y^2 = R^2$

$$\oint_L (2xy - y)\cdot dx + x^2 dy =$$

$$= \iint_D [2x - (2x-1)]\cdot dx \cdot dy = \iint_D dx \cdot dy = \pi R^2$$

§16. Криволинейный интеграл от полного дифференциала
Условия независимости криволинейного интеграла от пути

Теорема. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ определены и непрерывны в односвязной ориентированной области D плоскости $x0y$. Тогда следующие четыре утверждения равносильны.

1^0. Криволинейный интеграл $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ по любому замкнутому контуру, лежащему в D.

2^0. Криволинейный интеграл $\oint\limits_{M_0M_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависит от пути, а лишь от конечных точек M_0 и M_1 и функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

$$\oint\limits_{M_0\alpha M} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \oint\limits_{M_0\beta M} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

3^0. Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$:

$$d\,u(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

4^0. В каждой точке области D $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

Доказательство.

Для доказательства равносильности перечисленных утверждений достаточно показать, что:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftarrow & 4 \\ \downarrow & & \uparrow \\ 2 & \rightarrow & 3 \end{array}$$

$1 \rightarrow 2$

Пусть криволинейный интеграл $\oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ по любому замкнутому контуру, лежащему в D.

$$I = \oint\limits_{M_0 \alpha M \beta M_0} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \oint\limits_{M_0 \alpha M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy +$$

$$+ \oint\limits_{M \beta M_0} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{M_0 \alpha M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \oint\limits_{M_0 \beta M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

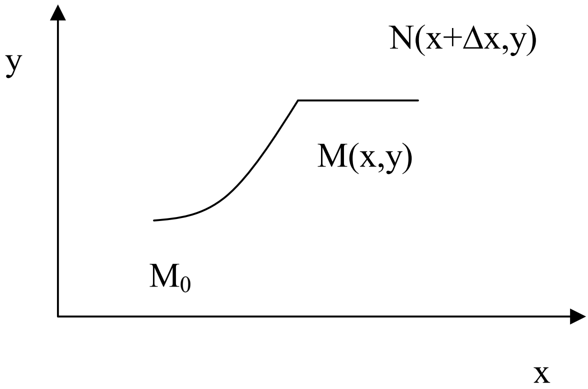
Что и требовалось доказать.

$2 \to 3$

Пусть $\oint\limits_{M_0 M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути, тогда при фиксированной точке M_0 - этот интеграл - функция конечной точки $M(x,y)$. Обозначим ее

$$u(x,y) = \oint\limits_{M_0 M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Покажем, что эта функция имеет непрерывные частные производные, а значит и дифференциал.



$$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y) =$$

$$= \oint_{M_0MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy -$$

$$- \oint_{M_0M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \oint_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \left|Q(x,y)dy = 0\right| =$$

$$= \oint_{MN} P(x,y)dx = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx = P(x+\theta\Delta x, y)\cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x + \theta \Delta x, y) = P(x, y)$$

(в силу непрерывности).

Аналогично, $\dfrac{\Delta_y u}{\Delta y} \to P(x, y)$

$$\Rightarrow d\,u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy =$$

$$= P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$3 \to 4$

Пусть $d\,u(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ так как они непрерывны.

$4 \to 1$

Пусть

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{x}} \quad \Rightarrow$$

$$\oint_{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{dx} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{dy} =$$

$$= \iint_{\boldsymbol{D}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{y}} \right) \boldsymbol{dxdy} = 0$$

Пример.

Вычислить $\displaystyle\int_{(2,3)}^{(4,6)} \left(\boldsymbol{xe}^{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y}\right)\boldsymbol{dx} - \left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^2\right)\boldsymbol{dy}$

Данный интеграл не зависит от пути , так как

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

$$\left| \begin{aligned} P &= \left(xe^{x} - y\right) \\ Q &= \left(x + y^{2}\right) \end{aligned} \right| \quad \left| \frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \right|$$

Следовательно, в качестве кривой можно взять ломанную, первое звено которой расположено параллельно оси ***Ox***, а второе параллельно оси ***Oy***.

$$\int\limits_{(2,3)}^{(4,6)} \left(xe^{x} - y\right)dx - \left(x + y^{2}\right)dy =$$

$$= \int\limits_{2}^{4} \left(xe^{x} - 3\right)dx - \int\limits_{3}^{6} \left(4 + y^{2}\right)dy =$$

$$= \left(xe^{x} - e^{x} - 3x\right)\Big|_{2}^{4} - \left(4y + \frac{y^{3}}{3}\right)\Bigg|_{3}^{6} =$$

$$= 3e^{4} - e^{2} - 81$$

§17. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

Следствие формулы Грина.

Выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны, является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Из теоремы следует, что $u(x,y) = \oint\limits_{M_0M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является одной из первообразных и этот интеграл удобно считать по ломаной.

$\Rightarrow$ все функции, дифференциал которых равен

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

могут быть найдены по формуле:

$$u(x, y) = \oint\limits_{M_0M} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C,$$

где $C = u(x_0, y_0)$.

Пример. Найти функцию по ее полному дифференциалу

$$du = (3x^2y + \cos x)dx + (x^3 + 2y)dy.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$u(x, y) =$$

$$= \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2y + \cos x)dx + (x^3 + 2y)dy + C =$$

$$\int\limits_{(0,0)}^{(x,0)} (3x^2y + \cos x)dx + (x^3 + 2y)dy +$$

$$\int\limits_{(x,0)}^{(x,y)} (3x^2y + \cos x)dx + (x^3 + 2y)dy + C =$$

$$= \int_0^x \cos x \cdot dx + \int_0^y \left(x^3 + 2y\right) \cdot dy + C =$$

$$= \sin x \Big|_0^x + \left(x^3 y + y^2\right)\Big|_0^y + C =$$

$$= \sin x + x^3 y + y^2 + C$$

Св.план 2017 г., поз.57

Платонова Ольга Алексеевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЧАСТЬ 7
КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Конспект лекций

Тираж 100 экз.

Москва, Копировальный центр PrintSide