Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Российский университет транспорта (МИИТ)»

Кафедра
“Высшая и вычислительная математика”

О.А.Платонова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЧАСТЬ 3
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Конспект лекций
для студентов
всех специальностей ИТТСУ

Москва – 2017

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Российский университет транспорта (МИИТ)»

Кафедра
"Высшая и вычислительная математика"

О.А.Платонова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЧАСТЬ 3
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Конспект лекций
для студентов
всех специальностей ИТТСУ

Москва – 2017

УДК 517
П37

Платонова О.А. Математический анализ. Часть 3. Исследование функции с помощью производной: Конспект лекций. - М.: РУТ (МИИТ), 2017. – 56 с.

Пособие содержит краткое изложение основных определений и теорем по теме «Исследование функции с помощью производной». В пособии рассмотрено много примеров. Пособие предназначено для студентов ИТТСУ.

Рецензенты: к.ф.м.н. Н.С.Петросян, доцент кафедры «Прикладная математика» ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; к.т.н. Л.Ф.Кочнева, зав.кафедрой «Математика» РУТ (МИИТ).

© РУТ (МИИТ), 2017

СОДЕРЖАНИЕ стр.

§ 1. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции 4

§ 2. Признаки существования экстремума 9

§ 3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке 24

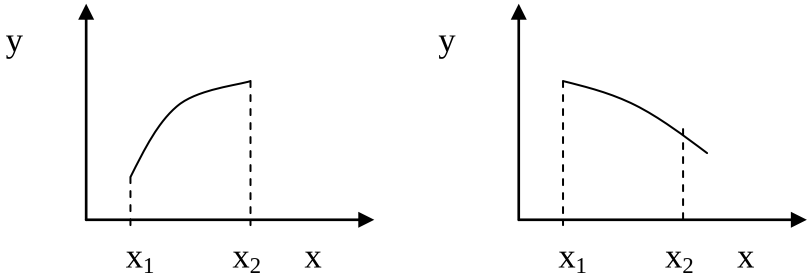
§ 4. Физические и геометрические задачи на экстремум 26

§ 5. Выпуклость и вогнутость графика функции 29

§ 6. Асимптоты графика функции 36

§ 7. Общая схема исследования функции 48

§1. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции



$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \qquad f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$$

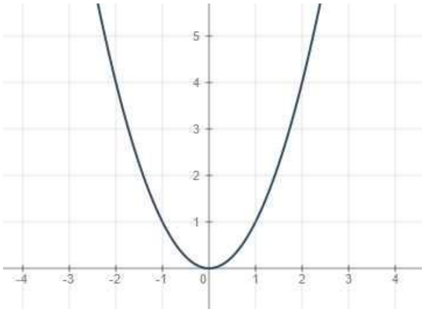
Определение. Точка $x = x_0$ называется точкой максимума (минимума) непрерывной функции $f(x)$, а значение $f(x_0)$ максимумом (минимумом) этой функции, если существует некоторая окрестность точки $x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что значение функции в любой точке окрестности будет меньше (больше) значения в точке x_0.

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \quad \left(f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)\right)$$

при $|\Delta x| < \delta$

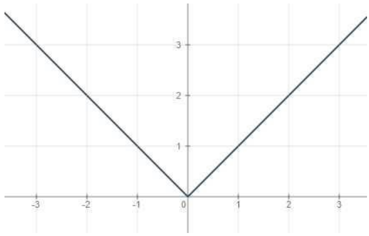
Экстремумы бывают гладкие и остроугольные.

Гладкие экстремумы



$y = x^2$

Остроугольные



$y = |x|$

Признак возрастания и убывания функции.

Теорема. Если $y = f(x)$ дифференцируема на (a,b) и $y'(x) > 0$ $\left(y'(x) < 0\right)$, то $f(x)$ на (a,b) возрастает (убывает).

Доказательство.

Пусть $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$ $x_1 < x_2 \in (a,b)$.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1),$$

где $x_1 < \xi < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

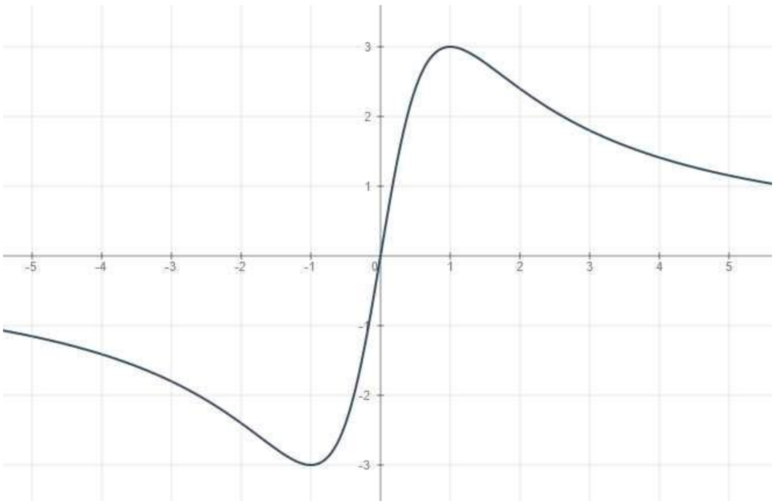
Аналогично рассматривается $f'(x) < 0$.

Примеры.

1^0. $y = \dfrac{6x}{1 + x^2}$.

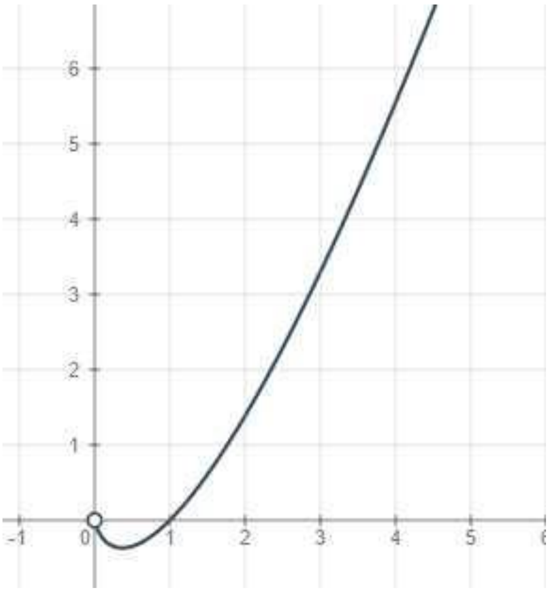
$$y' = \frac{6\left(1 + x^2\right) - 6x \cdot 2x}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{6\left(1 - x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^2}$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
y	↘	-3	↗	3	↘
y'	-	0	+	0	-



2^0. $y = x\ln x$ $\quad y' = \ln x + 1$.

x	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, \infty)$
y	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗
y'	$-\infty$	-	0	+



§2. *Признаки существования экстремума*

Необходимый признак экстремума

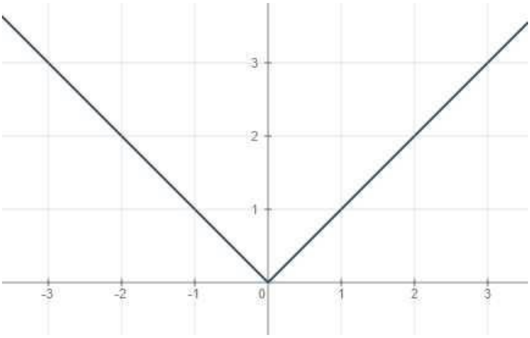
Теорема. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в ней, а в самой точке x_0 функция имеет экстремум, то $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует.

Доказательство.

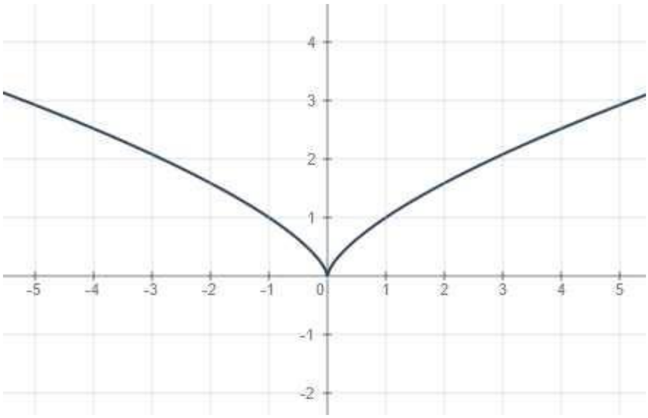
Если в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ дифференцируема, то по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. Но может случиться, что в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ не дифференцируема.

Примеры.

$1^0.\ \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}|$



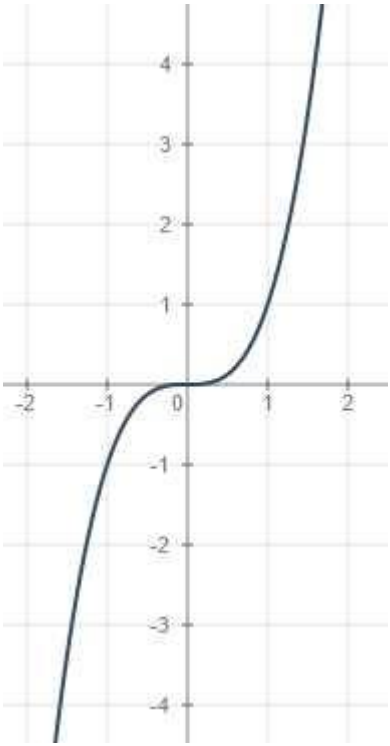
$2^0.\ \boldsymbol{y} = \sqrt[3]{\boldsymbol{x}^2}$



Замечание. Необходимый признак не является достаточным. Его выполнение не гарантирует существования экстремума.

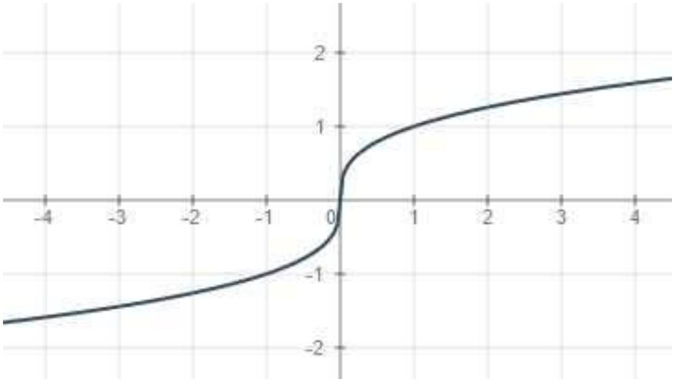
Примеры.

1^0. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^3$



$\boldsymbol{y}'(0) = 0.$

2^0. $y = \sqrt[3]{x}$



$y'(0)$ - не существует.

Определение. Точка $x = x_0$, в которой производная $f'(x_0) = 0$ или не существует, называется критической точкой I–го рода. (Если $f'(x_0) = 0$, то x_0 -стационарная точка).

Первый достаточный признак экстремума

Теорема. Если слева и справа от критической точки x_0, в которой функция $y = f(x)$ непрерывна, существуют промежутки $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$, в которых $f'(x)$ имеет постоянный знак, то:

1) x_0 не является точкой экстремума, если при переходе через x_0 $f'(x)$ не меняет знак.

2) x_0 является точкой экстремума, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку $x = x_0$. При этом

	$(x_0 - \delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0 + \delta)$
y'	+	max	-
y'	-	min	+

Доказательство.

Пусть $f'(x)>0$ слева и $f'(x)<0$ справа $\Rightarrow f(x)$ возрастает слева и убывает справа.

$\Rightarrow \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$f(x)<f(x_0)\Rightarrow f(x\ \ )$ – max.

Если $f'(x)>0$ в обоих промежутках $\left(f'(x)<0\right)$, то она всюду возрастает (убывает).

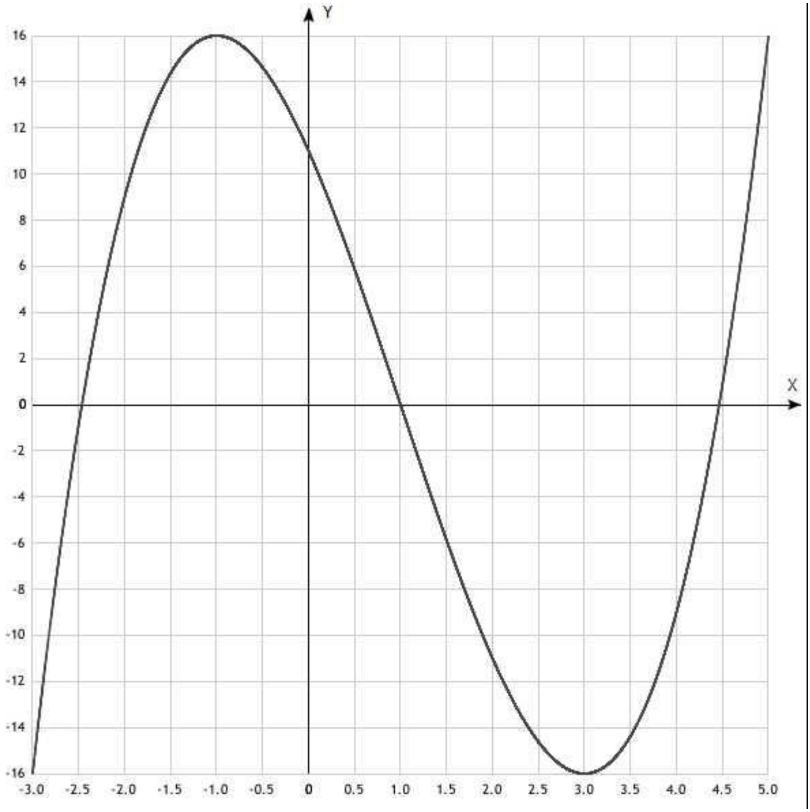
Примеры.

1^0. $y=x^3-3x^2-9x+11$

$$y'=3x^2-6x-9=3\left(x^2-2x-3\right)=3(x+1)(x-3)$$

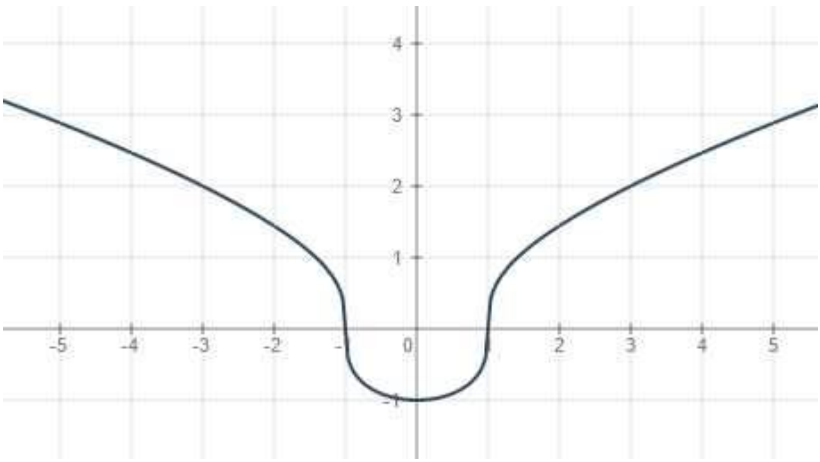
.

x	(-∞,-1)	-1	(-1,3)	3	(3,+∞)
y	↑	max 16	↘	min -16	↗
y'	+	0	-	0	+



$$2^0.\ \ y=\sqrt[3]{x^2-1} \qquad y'=\frac{2x}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}$$

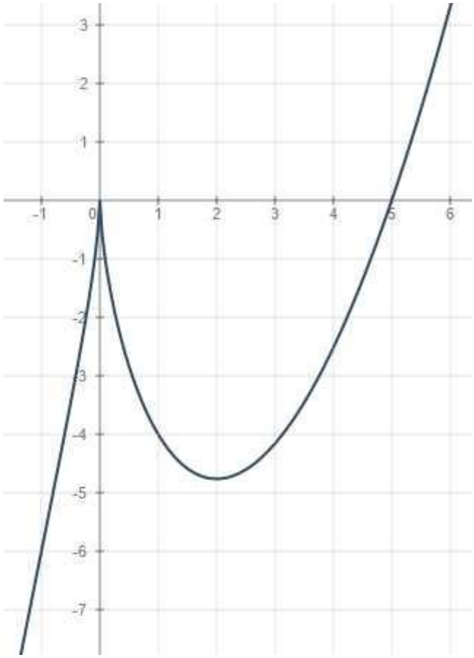
x	(-∞,-1)	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	(1,+∞)
y	↘	экстр нет	↘	min	↗	экс тр нет	↗
y'	-	+∞ не сущ	-	0	+	+∞ не сущ	+



$3^0.\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{2/3}(\boldsymbol{x}-5)$

$$\boldsymbol{y}' = \frac{2(\boldsymbol{x}-5)}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{x}^{2/3} = \frac{2\boldsymbol{x}-10+3\boldsymbol{x}}{3\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}} = \frac{5\boldsymbol{x}-10}{3\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}$$

$\boldsymbol{x}$	$(\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$\boldsymbol{y}$	↗	0 max	↘	$-6\sqrt{2}$ min	↗
$\boldsymbol{y}'$	+	∞	-	0	+



Второй достаточный признак экстремума

Теорема. Если в критической точке $x = x_0$, функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема, $f'(x) = 0$, $f''(x) < 0$ $\left(f''(x) < 0\right)$, то при $x = x_0$ $f(x)$ имеет max (min).

Доказательство.

Пусть $f''(x) < 0$.

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} < 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x < 0 \Rightarrow f'(x_0 + \Delta x) > 0 \\ \Delta x > 0 \Rightarrow f'(x_0 + \Delta x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \max$$

Пример.

$$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x =$$

$$= 4x\left(x^2 - 3x + 2\right) = 4x(x-1)(x-2)$$

$$y'' = 12x^2 - 24x + 8$$

$$y''(0)=8>0 \quad \Rightarrow \quad \min$$

$$y''(1)=-4<0 \quad \Rightarrow \quad \max$$

$$y''(2)=8>0 \quad \Rightarrow \quad \min$$

Третий достаточный признак экстремума

Теорема. Если в критической точке $x=x_0$, обращаются в нуль

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0),$$

а $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, то x_0 ***не будет*** точкой экстремума, если n ***нечетно***, и в x_0 - ***точка экстремума***, если n ***четно***. При этом, если $f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow \min$, $f^{(n)}(x_0)<0 \Rightarrow \max$.

Доказательство. Напишем формулу Тейлора

$$f(x)=f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

$n = 2k \Rightarrow f(x) - f(x_0)$ имеет постоянный знак $\Rightarrow$ экстремум.

$$n = 2k + 1 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^{2k+1}$$

при переходе через $x = x_0$ меняет знак $\Rightarrow$ экстремума нет.

Примеры.

1^0. $y = e^x + e^{-x} + 2\cos x$

$$y' = e^x - e^{-x} - 2\sin x$$

Легко видеть, что в точке x = 0 производная будет равна нулю. Вычислим производные более высокого порядка.

$$y'' = e^x + e^{-x} - 2\cos x, \quad y''(0) = 0;$$

$$y''' = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad y'''(0) = 0;$$

$$y^{(4)} = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad y^{(4)}(0) = 4.$$

Так как первая, отличная от нуля производная в точке x = 0 четного порядка, то экстремум есть. Так как она положительна, то

$x = 0$ - точка минимума..

$2^0.\quad \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}-1)^3 \cdot (\boldsymbol{x}+2)^3$

$$\boldsymbol{y}' = 3\cdot(\boldsymbol{x}-1)^2\cdot(\boldsymbol{x}+2)^3 + 3\cdot(\boldsymbol{x}-1)^3\cdot(\boldsymbol{x}+2)^2 =$$

$$= 3\cdot(\boldsymbol{x}-1)^2\cdot(\boldsymbol{x}+2)^2\cdot(2\boldsymbol{x}+1)$$

$\boldsymbol{x}=1, \boldsymbol{x}=-2, \boldsymbol{x}=-\frac{1}{2}$ - критические точки.

$$\boldsymbol{y}'' = \left[3\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}-2\right)^2\cdot(2\boldsymbol{x}+1)\right]' =$$

$$= 6\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}-2\right)\cdot(2\boldsymbol{x}+1)^2 + 6\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}-2\right)^2 =$$

$$= 6(\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}+2)\left[4\boldsymbol{x}^2+4\boldsymbol{x}+1+\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}-2\right]' =$$

$$= 6(\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}+2)\left(5\boldsymbol{x}^2+5\boldsymbol{x}-1\right)$$

$\boldsymbol{y}''(-\frac{1}{2}) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}$ - точка минимума.

$$\boldsymbol{y}''' = \left[6(\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}+2)\left(5\boldsymbol{x}^2+5\boldsymbol{x}-1\right)\right]' =$$

$$= \left[6\cdot\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}-2\right)\cdot\left(5\boldsymbol{x}^2+5\boldsymbol{x}-1\right)\right]' =$$

$$= 6 \cdot (2x+1)\left(5x^2+5x-1\right)+$$

$$+ 6 \cdot \left(x^2+x-2\right) \cdot (10x+5) =$$

$$= 6 \cdot (2x+1) \cdot \left(10x^2+10x-11\right)$$

$x = 1$

$y'(1) = y''(1) = 0,\ y'''(1) > 0 \quad \Rightarrow$ экстремума нет

$x = -2$

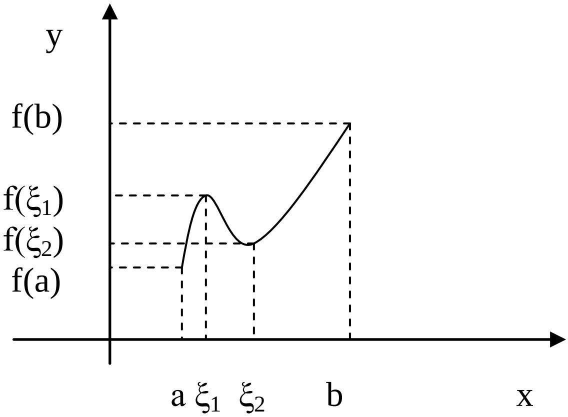
$y'(-2) = y''(-2) = 0, y'''(-2) > 0 \Rightarrow$ экстремума нет

§3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Согласно теореме Ферма, если экстремум достигается во внутренней точке ξ отрезка, то $f'(\xi)=0$. Но наибольшее и наименьшее значения могут достигаться и на границе отрезка $[a,b]$. Таким образом, если $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots\xi_n$ - критические точки функции, принадлежащие отрезку $[a,b]$, то

$$y_{\text{наиб}}=\sup\{f(\xi_1), f(\xi_2),\ldots f(\xi_n), f(a), f(b)\}$$

$$y_{\text{наим}}=\inf\{f(\xi_1), f(\xi_2),\ldots f(\xi_n), f(a), f(b)\}$$



Пример. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = x^3 + 5x^2 + 3x$$

на отрезке [-4; -1].

Решение. Вычислим производную:

$$y' = 3x^2 + 10x + 3.$$

Найдем критические точки:

$$3x^2 + 10x + 3 = 0;$$

$$x_1 = -3;$$

$x_2 =$-1/3 – не входит в рассматриваемую область.

Сравним значение в критической точке со значениями на границе области:

y(-4) = 4;

y(-3) = 9;

y(-1) = 1.

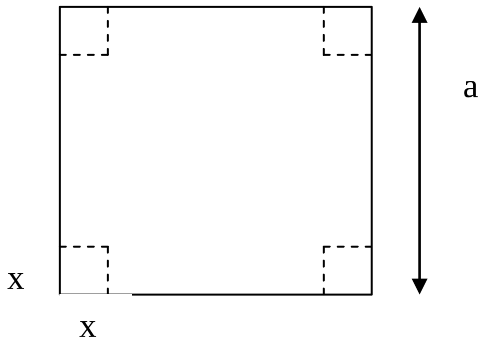
Таким образом, наименьшее значение функции $y = x^3 + 5x^2 + 3x$ на отрезке [-4; -1] достигается в точке x = -1 и равно 1, а наибольшее значение функции $y = x^3 + 5x^2 + 3x$ на отрезке [-4; -1] достигается в точке x = -3 и равно 9.

§4. Физические и геометрические задачи на экстремум

Во многих физических задачах требуется найти параметры, при которых некоторая величина принимает наибольшее или наименьшее значения.

Примеры.

1^0. Как получить коробку наибольшей вместимости из картонного квадратного листа со стороной a?



$$V(x) = x(a-2x)^2, \quad x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$$

$$V'(x) = (a-2x)^2 + x \cdot 2(a-2x)(-2) =$$

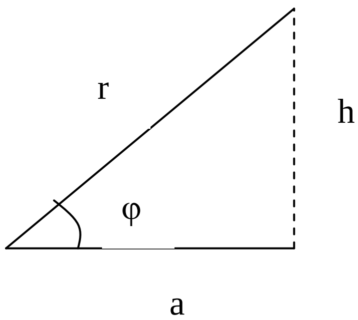
$$= (a-2x) \cdot (a-2x-4x) = 0$$

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad x_2 = \frac{a}{6}, \quad V\left(\frac{a}{2}\right) = V(0) = 0$$

$V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27} \Rightarrow$ наибольшая вместимость $\frac{2a^3}{27}$

при $x = \frac{a}{6}$

2^0. На какой высоте надо повесить лампочку, чтобы освещенность была наибольшей?



$$J = c\frac{\sin\varphi}{r^2} \quad \sin\varphi = \frac{h}{r} \quad r = \sqrt{h^2 + a^2} \Rightarrow$$

$$J(h) = c\frac{h}{\left(h^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

$$J'(h) = c\frac{\left(h^2 + a^2\right)^{3/2} - h\cdot\frac{3}{2}\left(h^2 + a^2\right)^{1/2}\cdot 2h}{\left(h^2 + a^2\right)^3}$$

$$J'(h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 + a^2 - 3h^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

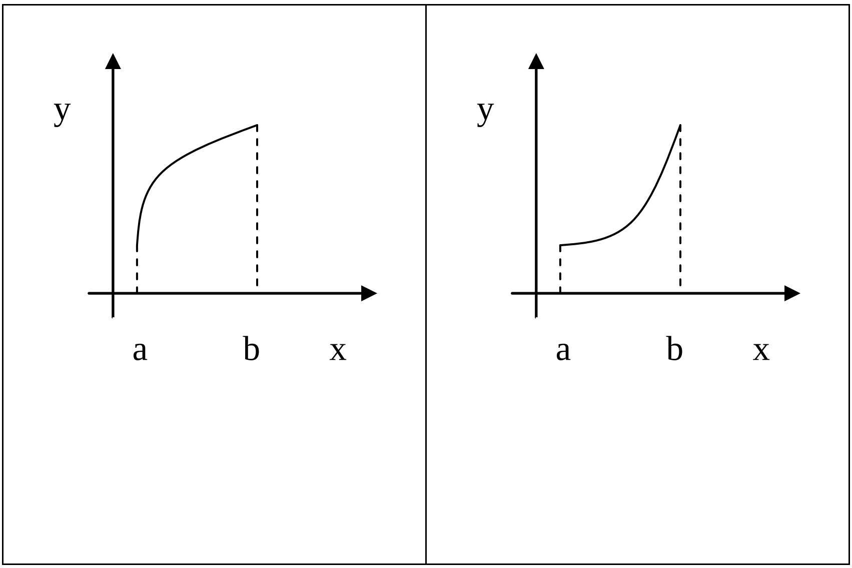
$$\Rightarrow \quad h^2 = \frac{a^2}{2}, \quad h = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

§5. Выпуклость и вогнутость

графика функции

Определение 1. Кривая $\mathscr{L}$ называется выпуклой вниз (вогнутой) на $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, если она расположена выше касательной, проведенной в любой точке кривой на указанном промежутке.

Определение 2. Кривая $\mathscr{L}$ называется выпуклой вверх (вогнутой) на $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, если она расположена ниже касательной, проведенной в любой точке кривой на указанном промежутке.



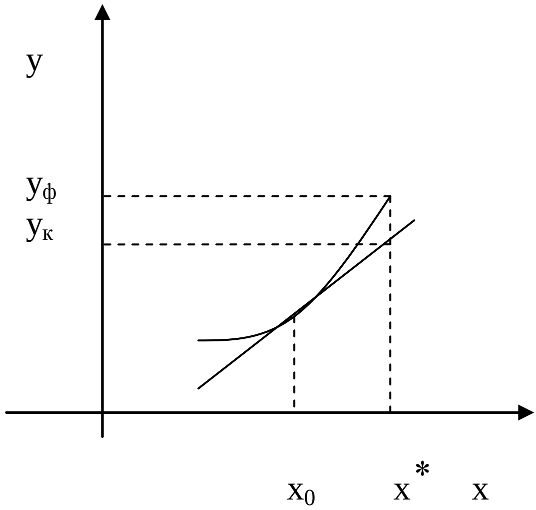
Теорема. Если в интервале $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ функция $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ дважды дифференцируема, а кривая $\mathscr{L}$ вогнута (выпукла), то $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})>0$ $\left(\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})<0\right)$ в $\forall\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Достаточное условие выпуклости (вогнутости)

Теорема. Пусть $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ непрерывна вместе с $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})$ на $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ и $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})>0$ $\left(\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})<0\right)$. Тогда дуга $\mathscr{L}$ вогнута (выпукла) на $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Доказательство.

Пусть для определенности $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})>0$ $\forall\boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))$ - произвольная точка кривой.



Построим касательную в точке $\boldsymbol{x}_0$.

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0).$$

Покажем, что $\boldsymbol{y}_{\text{ф}} > \boldsymbol{y}_{\text{касат}} \quad \forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

$$\begin{aligned}
&\Delta = \boldsymbol{y}_{\text{ф}} - \boldsymbol{y}_{\text{касат}} = \\
&= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\cdot\left(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_0\right) = \\
&= \boldsymbol{f}'(\xi)\cdot\left(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_0\right) - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\cdot\left(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_0\right) = \\
&= \left[\boldsymbol{f}'(\xi) - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\right]\cdot\left(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_0\right) = \\
&= \boldsymbol{f}''(\eta)\cdot(\xi - \boldsymbol{x}_0)\cdot\left(\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}_0\right) > 0 \\
&\boldsymbol{x}_0 < \eta < \xi < \boldsymbol{x}^* \quad \text{или} \quad \boldsymbol{x}^* < \xi < \eta < \boldsymbol{x}_0
\end{aligned}$$

$\Delta > 0$, если $f''(x) > 0$

$\Delta < 0$, если $f''(x) < 0$.

Точки перегиба

Определение. Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется точка кривой, отделяющая ее выпуклую часть вогнутой.

Теорема (достаточное условие). Если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет свой знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба. Если не меняет, то не является.

Доказательство. Вытекает из определения и достаточного условия выпуклости и вогнутости.

Определение. Точки, в которых $f''(x) = 0$ либо не существует, называются критическими точками II-го рода.

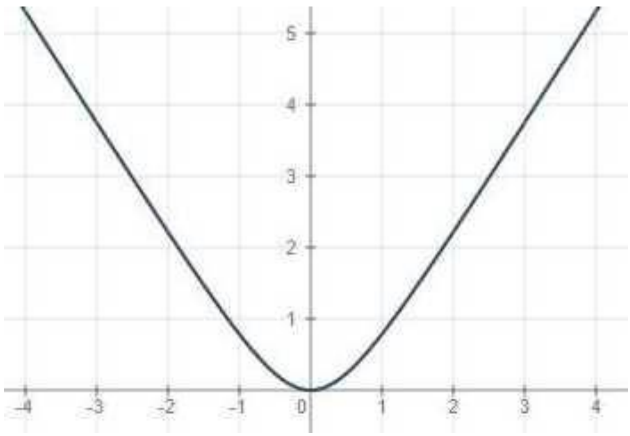
Примеры.

1^0. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \text{arctg}\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}' = \text{arctg}\boldsymbol{x} + \dfrac{\boldsymbol{x}}{1+\boldsymbol{x}^2}$;

$$\boldsymbol{y}'' = \frac{1}{1+\boldsymbol{x}^2} + \frac{1+\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{x}^2}{\left(1+\boldsymbol{x}^2\right)^2} = \frac{2}{\left(1+\boldsymbol{x}^2\right)^2} > 0 \quad \Rightarrow$$

всюду вогнутый.

$\boldsymbol{x}$	(-∞;0)	0	(1;∞)
$\boldsymbol{y}$	↘ ∪	0 min	↗ ∪
$\boldsymbol{y}'$	-	0	+
$\boldsymbol{y}''$	+	2	+

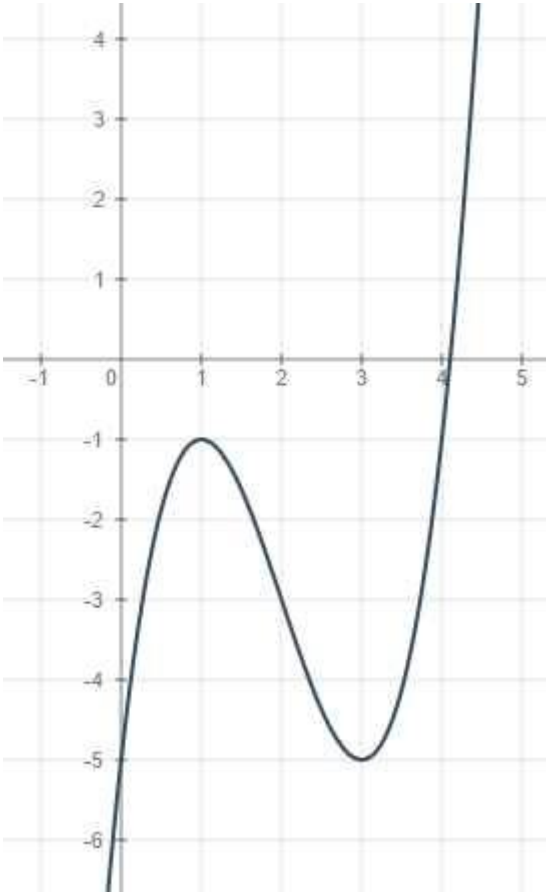


$2^0.\quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^3 - 6\boldsymbol{x}^2 + 9\boldsymbol{x} - 5$

$\boldsymbol{y}' = 3\boldsymbol{x}^2 - 12\boldsymbol{x} + 9 = 3(\boldsymbol{x} - 1)(\boldsymbol{x} - 3)$

$\boldsymbol{y}'' = 6\boldsymbol{x} - 12 = 6(\boldsymbol{x} - 2)$

$\boldsymbol{x}$	(-∞;1)	1	(1;2)	2	(2;3)	3	(3;∞)
$\boldsymbol{y}$	↗ ∩	max	↘ ∩	-3	↘ ∪	min	↗ ∪
$\boldsymbol{y}'$	+	0	-	-3	0	0	+
$\boldsymbol{y}''$	-	-	-	0	+	+	+


4
3
2
1
-1
0
1
2
3
4
5
-1
-2
-3
-4
-5
-6

§6. Асимптоты графика функции

Определение. Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая линия, к которой неограниченно приближается уходящая в бесконечность ветвь графика функции.

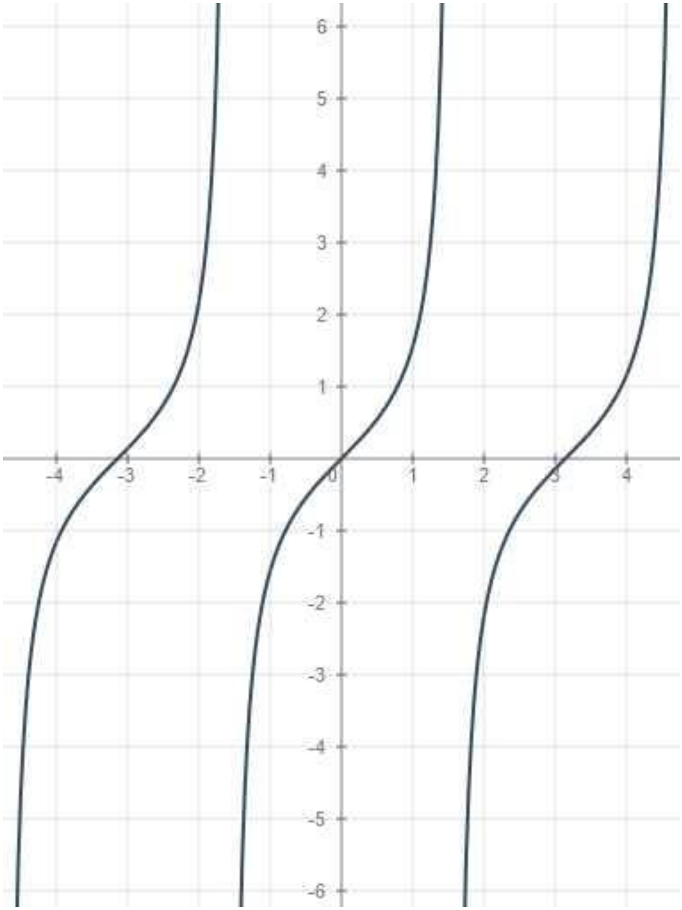
Вертикальные асимптоты:

$$x = a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \infty .$$

Их может быть бесконечно много. Вертикальные асимптоты могут быть только в точках разрыва второго рода.

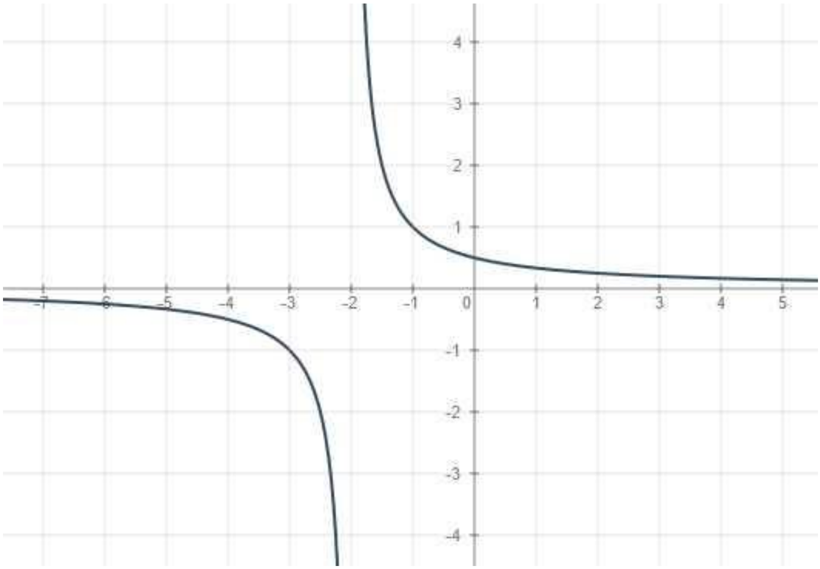
Примеры.

1^0. $\boldsymbol{y} = \mathrm{tg}\boldsymbol{x}$.



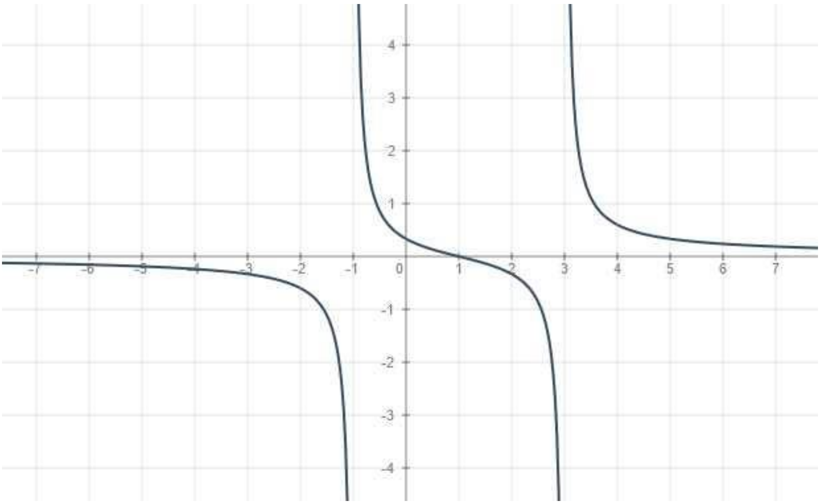
$\boldsymbol{x} = \dfrac{\pi}{2} + \pi\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}$ - вертикальные асимптоты.

2^0. $\boldsymbol{y} = \dfrac{1}{\boldsymbol{x}+2}$.



$\boldsymbol{x} = -2$ - вертикальная асимптота.

3^0. $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x}-1}{\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{x} - 3}$



$\boldsymbol{x} = -1$; $\boldsymbol{x} = 3$ - вертикальные асимптоты.

Наклонные асимптоты

Наклонными асимптотами бывают прямые вида

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{kx} + \boldsymbol{b}.$$

Различаются:

а) левосторонние асимптоты;

б) правосторонние асимптоты;

в) двусторонние асимптоты.

Для того, чтобы прямая была правосторонней асимптотой необходимо, чтобы:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(y_{ac} - y_{гр} \right) = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(kx + b - f(x) \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(k + \frac{b}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) = 0$$

Так как первый сомножитель стремится к бесконечности, то второй сомножитель должен стремиться к нулю.

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(k + \frac{b}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{k} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \left(kx + b - f(x)\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx\right)$$

Аналогично находятся левосторонние асимптоты.

Частный случай:

Если $\quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ - горизонтальная асимптота.

Прямая называется двусторонней асимптотой, если она одновременно является и правосторонней и левосторонней асимптотой.

Примеры.

1^0. $\boldsymbol{y}=\sqrt[3]{\boldsymbol{x}^3+1}$

$$\boldsymbol{k}=\lim_{\boldsymbol{x}\to\pm\infty}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}}=\lim_{\boldsymbol{x}\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}^3+1}}{\boldsymbol{x}}=1$$

$$\boldsymbol{b}=\lim_{\boldsymbol{x}\to\pm\infty}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{kx}\right)=$$

$$=\lim_{\boldsymbol{x}\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{\boldsymbol{x}^3+1}-\boldsymbol{x}\right)=$$

$$=\lim_{\boldsymbol{x}\to\pm\infty}\frac{\boldsymbol{x}^3+1-\boldsymbol{x}^3}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}^3+1}+\sqrt[3]{\left(\boldsymbol{x}^3+1\right)^2}+\boldsymbol{x}^2}=0$$

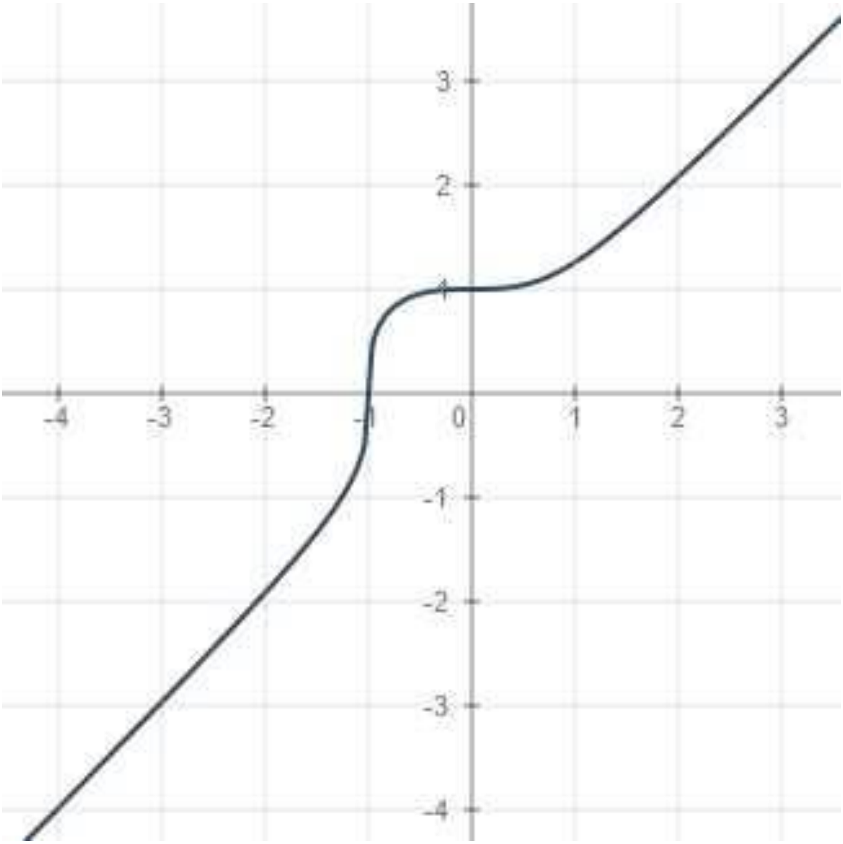
$\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ - двусторонняя асимптота

$$\boldsymbol{y}'=\frac{2\boldsymbol{x}^2}{\sqrt[3]{\left(\boldsymbol{x}^3+1\right)^2}}>0$$

Следовательно, функция возрастает на всей числовой прямой.

В точке $\boldsymbol{x}=-1$ вертикальная касательная.

$\boldsymbol{x}=0;\quad \boldsymbol{x}=-1$- точки перегиба.



3
2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2
-3
-4

2^0. $y=\sqrt{x^2+1}$

$$\left.\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = 1 \\
b &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0
\end{aligned}\right\}$$

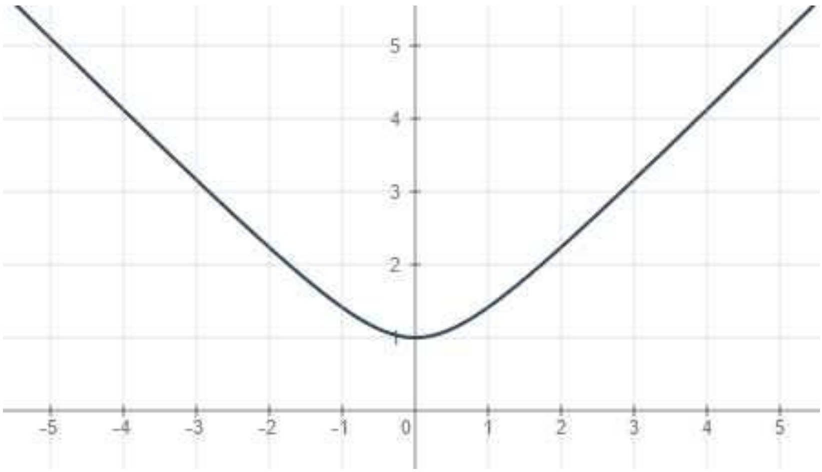
$y=x$ – правосторонняя асимптота

$$\left.\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \\
&= -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = -1 \\
b &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0
\end{aligned}\right\}$$

$y=-x$ – левосторонняя асимптота

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x = 0$$ - точка минимума.

$$y'' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} > 0$$ - график функции вогнутая кривая.



3^0. $y = x + \mathrm{arctg}x$

Найдем асимптоту при x→ +∞.

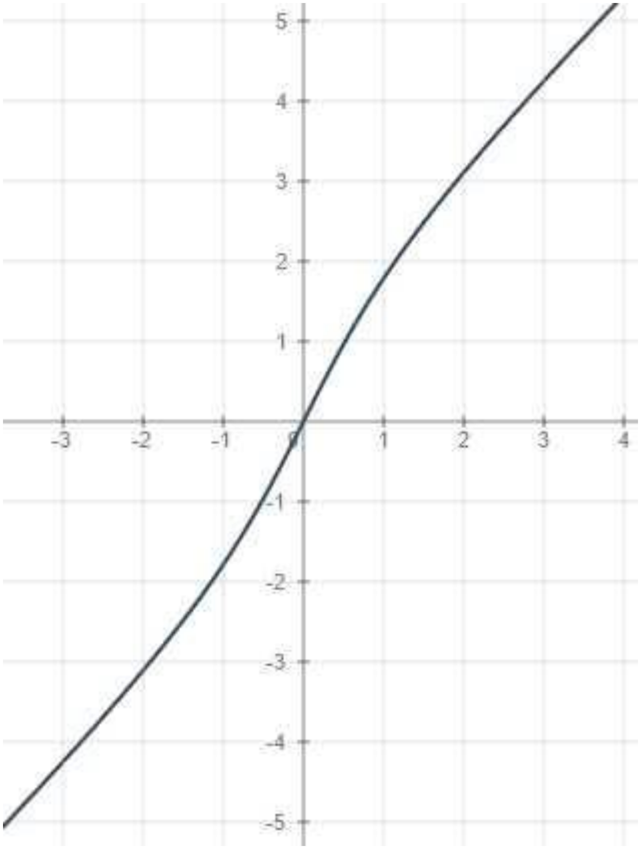
$$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \mathrm{arctg}x}{x} = 1 \\ b &= \lim_{x\to+\infty} \mathrm{arctg}x = \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} y = x + \frac{\pi}{2}$$

Найдем асимптоту при x→ -∞.

$$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \mathrm{arctg}x}{x} = 1 \\ b &= \lim_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}x = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} y = x - \frac{\pi}{2}$$

$y' = \dfrac{1}{1+x^2} + 1$ критических точек I-го рода нет. Функция монотонно возрастает.

$y'' = \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ $x = 0$ - критическая точка II-го рода, точка перегиба.


5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

§7. Общая схема исследования функции

Строя график функции, полезно придерживаться следующей схеме исследования функции.

1^0. Область определения и характеристики точек разрыва.

2^0. Вертикальные асимптоты.

3^0. Граничные точки и наклонные асимптоты.

4^0. Симметрия или общий вид, периодичность.

5^0. Точки пересечения с осями.

6^0. Критические точки I-го рода, возрастание, убывание функции, точки экстремума.

7^0. Критические точки II-го рода, выпуклость, вогнутость графика функции, точки перегиба.

Примеры.

1^0. $y = x^3 - 3x^2$

1. Область определения – вся числовая прямая, точек разрыва нет.

2. Вертикальных асимптот нет.

3. Граничных точек нет, наклонных асимптот нет, так как $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty.$

4. Функция общего положения.

5. Точки пересечения с осями (0; 0); (3; 0).

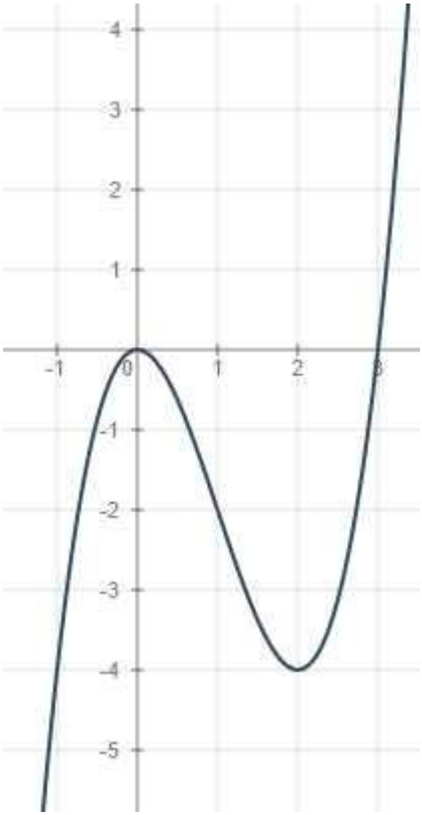
6. $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

x = 0; x = 2 – критические точки I-го рода.

7. $y'' = 6x - 6 = 6(x-1)$ 1

x = 1 - критическая точка II-го рода.

x	(-∞:0)	0	(0;1)	1	(1;2)	2	(2;∞)
y	↗ ∩	max 0	↘ ∩	-2	↘ ∪	min -4	↗ ∪
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+



2^0. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \dfrac{1}{\boldsymbol{x}^2}$

1. Область определения $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.

x = 0 – точка разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to\pm 0} x+\frac{1}{x^2}=+\infty.$$

2. x = 0 - вертикальная асимптота.

3. Граничных точек нет.

Наклонная асимптота двусторонняя, так как

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{4}{x^3}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{4}{x^2}-x\right)=0$$

$$y=x$$

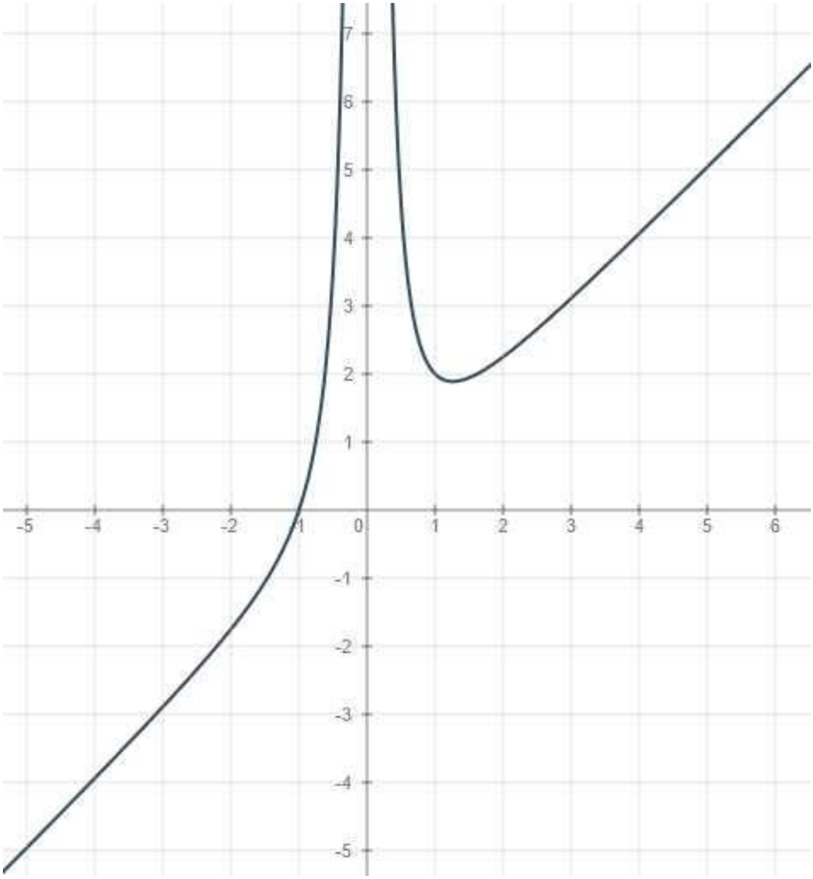
4. Функция общего положения.

5. Точка пересечения с осями (-1; 0).

6. $y' = 1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$.

$x=2$ - критическая точка первого рода, точка минимума. $y(2)=3.$

7. $y'' = \frac{24}{x^4}>0$ - кривая всюду вогнутая.



3^0. $\boldsymbol{y} = \dfrac{2\boldsymbol{x}-1}{(\boldsymbol{x}-1)^2}$

1. Область определения (-∞; 1)∪(1; +∞).

x = 1 – точка разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=+\infty.$$

2. x = 1 - вертикальная асимптота.

3. Граничных точек нет.

Наклонная асимптота двусторонняя, горизонтальная, так как

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow y=0.$$

4. Функция общего положения.

5. Точка пересечения с осями (0,5; 0); (0; -1).

6.

$$y'=\frac{2(x-1)^2-(2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3}=\frac{-2x}{(x-1)^3}\Rightarrow$$

x = 0 - точка минимума.

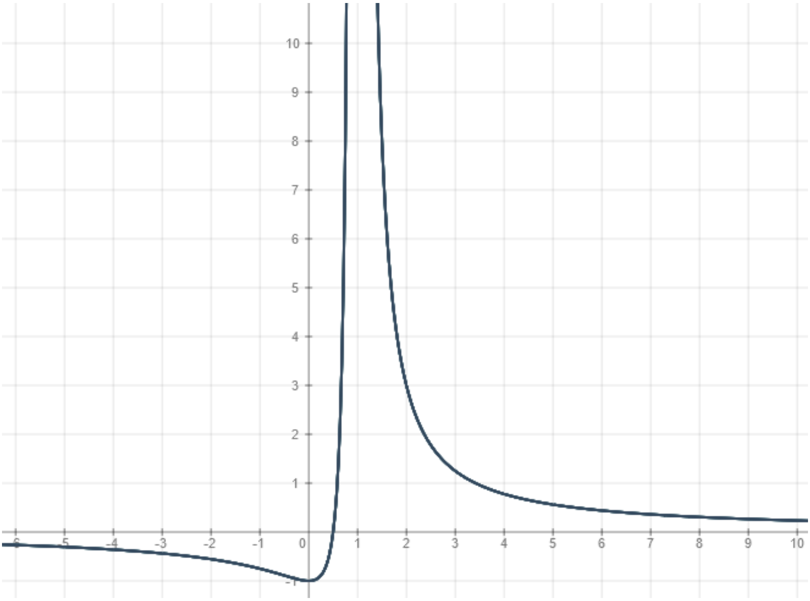
7.

$$y'' = \frac{2(x-1)^3 + 2x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{-2x+2+6x}{(x-1)^4} = \frac{4x+2}{(x-1)^4} \Rightarrow$$

$x = -\frac{1}{2}$ - точка перегиба.

x	$(-\infty;-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2};0)$	0	(0;1)	1	$(1;\infty)$
y	↘ $\cap$	т.п. $-\frac{8}{9}$	↘ $\cup$	min -1	↗ $\cup$	$\to\infty$	↘ $\cup$
y'	-	$-\frac{8}{27}$	-	0	+	$\to\infty$	-
y''	-	0	+		+		+


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Св.план 2017 г., поз.60

Платонова Ольга Алексеевна

Математический анализ

Часть 3

Исследование функции с помощью производной

Конспект лекций

Формат 60х84/16 Тираж 100 экз.

Москва, Копировальный центр PrintSide