МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА
(МИИТ)»

Кафедра
«Высшая и вычислительная математика»

М. Б. Аверинцев, Н. А. Корниенко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Москва – 2018

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА
(МИИТ)»

Кафедра
«Высшая и вычислительная математика»

М. Б. Аверинцев, Н. А. Корниенко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Конспект лекций

для студентов специальности ТКИ

Москва – 2018

УДК 519.8

А-19

Аверинцев М. Б., Корниенко Н. А. Математическое программирование: Конспект лекций. – М.: РУТ (МИИТ), 2018. – 66 с.

Конспект лекций содержит основные понятия и теоретические положения теории математического программирования. Конспект лекций предназначен студентам 3 курса ИТТСУ РУТ (МИИТ) специальности ТКИ.

Рецензенты:

доцент кафедры «Прикладная математика 1» РУТ (МИИТ) к.ф.-м.н. Зверкина Галина Александровна;

доцент кафедры Прикладной математики ФГБОУ ВО МГТУ «Станкин», к.ф.-м.н. Петросян Наталья Семеновна.

Содержание

1. Основные понятия математического программирования

1. 1. Задачи математического программирования

Многие задачи оптимизации сводятся к математическим моделям следующего вида:

$$f(x) \to min, \qquad x \in U.$$

В этом случае говорят об условной минимизации. В большинстве случаев множество U определяется системой равенств и (или) неравенств. В этом случае задача записывается следующим образом:

$$f(x) \to min\ (max) \qquad (1.1.1)$$

$$g_i(x) = 0\,, \qquad i \in I_1 \qquad (1.1.2)$$

$$g_i(x) = 0\,, \qquad i \in I_2 \qquad (1.1.3)$$

где $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \dots, m\}\,, \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset\,.$

Задача (1.1.1) – (1.1.3) называется **задачей математического программирования**.

Отметим некоторые **частные случаи** этой задачи.

1. **Линейное программирование**

В $(1) - (3)$ все функции линейные, кроме того $x_i \geq 0$ для всех i, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2. **Нелинейное программирование**

Хотя бы одна из функций в $(1.1.1) - (1.1.3)$ не является линейной.

3. **Задача на условный экстремум**

Нет ограничений – неравенств, т. е. $I_1 = \emptyset$.

4. **Задача выпуклого программирования**

Все функции $f(x)$, $g_i(x)$ – выпуклые, а ограничения – равенства отсутствуют, т. е. $I_2 = \emptyset$.

Решение задач математического программирования, как правило, связано с большими трудностями, чем решение задач безусловной минимизации.

1. 2. Примеры задач оптимизации, сводящихся к задачам математического программирования

Пример 1. Составить математическую модель следующей задачи. На двух предприятиях нужно изготовить N изделий некоторой продукции: затраты на производство x_1 изделий на первом предприятии составляют $(ax_1^2 + c)$ рублей, а на производство x_2 изделий на втором предприятии bx_2 рублей. Определить сколько изделий на каждом предприятии нужно произвести, чтобы затраты на их производство были минимальными.

Объектом оптимизации является план выпуска продукции. Управляемые переменные x_1 и x_2, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 = N$. Целевая функция

$$f(x_1, x_2) = ax_1^2 + c + bx_2 \rightarrow min\,.$$

Данная задача является задачей нелинейного программирования.

Пример 2. Экспериментатор измеряет величину y, зависящую от параметра x, n раз при различных величинах $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n.$. В результате получены n пар (x_i, y_i). Предполагаемая зависимость y от x задается линейной функцией $y = ax + b$, где $a \geq 0$,

$b \geq 0$. Необходимо подобрать коэффициенты a и b таким образом, чтобы минимизировать расстояние по вертикали от точек (x_i, y_i) до прямой $y = ax + b$.

Объектом оптимизации является выражение $y = ax + b$, содержащее два неизвестных коэффициента a и b. Управляемые переменные a, b и Δ, определяющая максимальное расстояние между ординатами экспериментальных точек (x_i, y_i) и точек $(x_i, ax_i + b)$, т. е.

$$-\Delta \leq y_i - ax_i - b \leq \Delta, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad \Delta \geq 0.$$

Целевая функция $f(a, b, \Delta) = \Delta \to min$.

Эта задача является задачей линейного программирования.

1. 3. Необходимые условия минимума в терминах направлений

Рассмотрим задачу математического программирования в виде $f(x) \to min,\ x \in U$, где допустимое множество U выпукло и задается тем или иным способом.

Для точек множества U введем следующие понятия направлений, учитывающие локальные свойства множества U и целевой функции $f(x)$.

Определение 1. Вектор $p \in E_n$ задает в точке $x_0 \in E_n$ возможное направление, если $x_0 + \alpha\, p \in U$ при всех достаточно малых $\alpha > 0$.

Если x_0 – внутренняя точка множества U, то, очевидно, возможным является любое направление.

Для граничной точки x_0 множества U возможные направления определяются видом границы в окрестности этой точки.

Пример 1. Точка x_0 лежит на границе множества U, определяемого неравенством $\langle a, x\rangle \leq b$, т. е. x_0 принадлежит гиперплоскости $\langle a,\ x\rangle = b$. Тогда возможные направления удовлетворяют условию $\langle a, p\rangle \leq 0$.

Здесь $\langle a,\ x\rangle$ – скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_n$ и $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$:

$$\langle a, x\rangle = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n \,.$$

Заметим, что каждой точке $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_n$ соответствует вектор $\overrightarrow{OA}$, где $O(0,0, \dots ,0)$.

Пример 2. Множество U, на границе которого лежит точка x_0, задано неравенством $g(x) \le 0$, где $g(x)$ – нелинейная выпуклая функция, причем $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) \ne 0$, где $g'(x_0) = \overrightarrow{grad} g(x_0)$.

Градиент $g'(x_0)$ является нормальным вектором к гиперплоскости, касательной к гиперповерхности $g(x) = 0$. Эта гиперплоскость проходит через точку x_0, а вектор $g'(x_0)$ вне множества U. Поэтому возможные направления p в точке x_0 должны удовлетворять неравенству

$$\langle\, g'(x_0),\ p\,\rangle < 0.$$

В граничных точках невыпуклого множества U возможные направления могут и не существовать.

Пример 3. Рассмотрим плоскость E_2 и множество U, задаваемое системой неравенств

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 \le 0 \\ x_1^3 - x_2 \le 0 \\ 0 \le x_1 \le 1 \end{cases}.$$

Тогда точка $O(0,0)$ лежит во множестве U, но в этой точке нет ни одного допустимого направления. Множество U не является выпуклым.

Для любой точки x_0 выпуклого множества U всегда можно указать хотя бы одно возможное направление. Пусть $x \in U$, $x \ne x_0$. Тогда направление $p = x - x_0$ является возможным. В самом деле

$$x_0 + \alpha p = x_0 + \alpha(x - x_0) = \alpha x + (1 - \alpha)x_0,$$

а эта точка принадлежит U при всех $0 \le \alpha \le 1$ по определению выпуклого множества.

Определение 2. Вектор p задает направление убывания функции $f(x)$ в точке $x_0 \in U$, если p – возможное направление и $f(x_0 + \alpha p) < f(x_0)$ для всех достаточно малых $\alpha > 0$.

Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, вектор p задает возможное направление и

$$\langle f'(x_0), p \rangle < 0 ,$$

то вектор p задает направление убывания. В самом деле

$$f(x_0 + \alpha p) - f(x_0) = \langle f'(x_0), \alpha p \rangle + \theta(\alpha) =$$

$$= \alpha \left(\langle f'(x_0), p \rangle + \frac{\theta(\alpha)}{\alpha} \right) < 0 ,$$

так как $\theta(\alpha)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем α, то неравенство выполняется при всех достаточно малых $\alpha > 0$.

Геометрически это означает, что p составляет тупой угол с направлением градиента функции $f(x)$.

Сформулируем с использованием введенных понятий необходимое условие локального минимума.

Теорема 1. Если x^* – точка локального минимума функции $f(x)$ в задаче математического программирования, то среди всех возможных направлений p из этой точки нет ни одного направления убывания функции $f(x)$.

Теорема 2. Пусть в задаче математического программирования допустимое множество U является выпуклым, а целевая функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема. Тогда:

1. Если x^* – точка локального минимума, то

$$\langle f'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \text{при всех} \quad x \in U. \quad (1.3.1)$$

2. Если $f(x)$ – выпуклая на U функция и выполняется (1.3.1), то x^* является точкой глобального минимума задачи.

Следствие. Если x^* – внутренняя точка множества U, то неравенство (1) эквивалентно равенству

$$f'(x^*) = 0. \qquad (1.3.2)$$

На основании теорем 1 и 2 можно рекомендовать при решении задач математического программирования начинать с проверки условия (1.3.2). Если это условие выполнено, то в точке $x^* \in U$, то точка задачи x^* является решением задачи. В противном случае решение принадлежит границе множества U и его поиск надо продолжить. Возможен так же случай, когда задача вообще не имеет решения.

1. 4. Теорема Каруша – Джона

Эта теорема дает общие условия решения произвольной задачи математического программирования. Рассмотрим следующую задачу математического программирования: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$

$$f(x) \to min$$

$$g_i(x) = 0\,, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$h_i(x) \le 0\,, \qquad i = 1, 2, \dots, r\,.$$

Теорема

Если x^* – решение данной задачи, все функции непрерывно дифференцируемы, то найдутся такие числа $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \dots,\ \lambda_m,\ \mu_1,\ \mu_2, \dots,\ \mu_r$ не все равные нулю, что

$$\lambda_0 f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i'(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j\, h_j(x^*) = 0\ ,$$

причем $\lambda_0 \ge 0\,,\ \ \mu_j \ge 0\,,\ \ j = \overline{1,\ r}\,,$

и $\mu_j\, h_j(x^*) = 0,\ \ j = \overline{1,\ r}\,.$

Последнее условие называется **условием дополняющей нежесткости**.

Заметим, что обычно $\lambda_0 > 0$ и тогда можно положить $\lambda_0 = 1$. Если $\lambda_0 = 0$, то это означает, что решение не зависит от целевой функции, а это возможно только в случае, когда множество U состоит из одной точки. Ясно, что этот случай не представляет большого интереса. Теорема в указанном виде редко применяется в общем виде. Ниже будут рассмотрены некоторые варианты этой теоремы для более специальных случаев.

Пример. Рассмотрим **Пример 1** из пункта 1.2. о распределении работ между двумя предприятиями

$$f(x_1, x_2) = ax_1^2 + c + bx_2 \to min$$

$$x_1 + x_2 = N, \qquad x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0.$$

Приведя задачу к стандартному виду, получим

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - N = 0$$

$$h_1(x) = -x_1\,, \quad h_2(x) = -x_2\,.$$

Основная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 2a\,x_1\,\lambda_0 + \lambda_1 - \mu_1 = 0 \\ b\,\lambda_0 + \lambda_1 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1\,x_1 = 0 \\ \mu_2\,x_2 = 0 \end{cases} .$$

Положим $\lambda_0 = 1$, как говорилось выше. Заметим, что можно положить $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, так как в противном случае, мы получим, что вся продукция будет выпускаться на одном предприятии, а этот случай не представляет интереса.

Получаем $x_1 = -\frac{\lambda_1}{2a}$, $\lambda_1 = -b$, откуда

$$x_1 = \frac{b}{2a} \ , \qquad x_2 = N - \frac{b}{2a} \ .$$

Все условия теоремы выполнены, поэтому получено оптимальное решение.

Если $\frac{b}{2a} \geq N,$ то получаем $x_1 = N, \ \ x_2 = 0.$

Решение задач линейного программирования в дальнейшем не будет подробно изучаться, так как входит в программу других курсов. Заметим, что задача линейного программирования может быть решена с помощью теоремы Каруша - Джона.

2. Методы решения некоторых задач нелинейного программирования

2. 1. Задача дробно-линейного программирования

Это задача, в которой целевая функция дробно-линейна, а допустимое множество определяется линейными ограничениями:

$$f(x) = \frac{\langle c, x\rangle + c_0}{\langle d, x\rangle + d_0} \to min \qquad (2.1.1)$$

$$\langle a_i, x\rangle = b_i \quad i = \overline{1, p} \qquad (2.1.2)$$

$$\langle a_i, x\rangle \geq b_i \quad i = \overline{p+1, m} \qquad (2.1.3)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\,, \quad x_i \geq 0\,, \quad i = \overline{1, n} \qquad (2.1.4)$$

Задача (2.1.1) – (2.1.4) может быть сведена к задаче линейного программирования.

Будем считать, что на допустимом множество U знаменатель в нуль не обращается. В этом случае знаменатель сохраняет знак. В этом случае можно считать, что $\langle d, x\rangle + d_0 > 0$, так как в противном случае можно числитель и знаменатель целевой функции умножить на (-1) и добиться требуемого неравенства. Введем новые переменные.

Положим

$$y_0 = \frac{1}{\langle d, x\rangle + d_0} \ ,$$

Очевидно $y_0 > 0$, далее $y_j = x_j\, y_0\,,\quad j = \overline{1,n}\,.$

В этих переменных задача принимает вид:

$$\bar{f}\,(y) = \sum_{j=0}^{n} c_j\, y_j \to min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j - b_i\, y_0 = 0\,,\quad i = \overline{1,p}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j - b_i\, y_0 \geq 0\,,\quad i = \overline{p+1,m}$$

$$\sum_{j=0}^{n} d_j\, y_j = 1$$

$$y_j \geq 0\,,\quad j = \overline{0,n}\,.$$

Это задача линейного программирования. Пусть ее решение

$$y^* = (y_0^*\,, y_1^*\,, \ldots, y_n^*)$$

$$\bar{f}^{\,*} = \bar{f}\,(y^*)\,.$$

Решение исходной задачи находится следующим образом:

$$x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*} \ , \qquad j = \overline{1, n} \ ,$$

значение целевой функции при этом не меняется

$$f^* = \overline{f}^* \ .$$

2. 2. Задача на условный экстремум

Рассмотрим задачу минимизации.

$$f(x) \to \min \tag{2.2.1}$$

$$g_i(x) = 0\,, \quad i = \overline{1, m} \tag{2.2.2}$$

где: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n\,, \quad m < n\,.$

Предполагается, что все функции имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Матрица Якоби

$$\left\| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right\|$$

имеет ранг равный m в каждой точке допустимого множества U, которое определяется равенствами (2.2.2).

Это означает, что градиенты функций $g_i(x)$, $g_i'(x) = \overrightarrow{grad}\, g_i(x)$ линейно независимые.

В этом случае (2.2.2) задают равенства между m зависимыми и $(n - m)$ независимыми переменными. Пусть, для определенности, $x_1,\ x_2, \dots,\ x_m$ – зависимые, а

$x_{m+1},\ x_{m+2}, \dots ,\ x_n$ – независимые переменные. В этом случае можно получить равенства

$$x_i = \varphi_i(x_{m+1},\ x_{m+2}, \dots ,\ x_n)\,, \qquad i = \overline{1,m}\,.$$

Подставляя их в $f(x)$, получим

$$f(x) = f(\varphi_1,\ \varphi_2, \dots,\ \varphi_m, x_{m+1},\ x_{m+2}, \dots,\ x_n) =$$

$$= F(\ x_{m+1},\ x_{m+2}, \dots,\ x_n)\,.$$

Получили задачу на безусловный экстремум $F \to \min$ без ограничений на переменные.

Однако, на практике решить задачу таким способом удается только в редких случаях. Решить систему уравнений (2.2.2) весьма затруднительно, а часто невозможно. Поэтому в классическом математическом анализе разработаны другие методы решения этой задачи, в частности, **метод множителей Лагранжа**. Опишем этот метод.

Пусть x^* – точка минимума в задаче (2.2.1) – (2.2.2). Будем рассматривать только допустимые в точке x^* приращения $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$, при которых $x^* + \Delta x \in U$, т. е. $g_i(x^* + \Delta x) = 0\,, \quad i = \overline{1,m}\,.$

Для таких приращений с точностью до бесконечно малых высокого порядка

$$\Delta g_i(x^*) = g_i(x^* + \Delta x) - g_i(x^*) = d\, g_i(x^*) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}\, \Delta x_j = 0\,, \qquad i = \overline{1, m}\,. \qquad (2.2.3)$$

Заметим, что для независимых приращений $dx_j = \Delta x_j$. Из равенства (2.2.3) и того, что ранг матрицы Якоби равен m следует, что независимых приращений $\Delta x_i = dx_i$ существует только $(n - m)$, остальные через них выражаются.

Для рассматриваемых приращений разность

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) \geq 0\,.$$

Так как x^* – точка минимума, то это возможно только при условии

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}\, \Delta x_i = 0 \qquad (2.2.4)$$

при тех же приращениях Δx_i .

Это означает, что уравнение (2.2.4) является следствием уравнений (2.2.3), т. е.

$$f'(x^*) = -\lambda_1\, g_1'(x^*) - \cdots - \lambda_m\, g_m'(x^*) \qquad (2.2.5)$$

Знаки «минус» поставлены для удобства. Равенство (2.2.5) означает, что вектор $\overrightarrow{grad}\, f$ является линейной комбинацией векторов g_i', которые являются нормалями к гиперплоскости, задаваемой уравнениями (2.2.2). Условия (2.2.5) удобно записывать в виде условий на функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(x)\,. \qquad (2.2.6)$$

Множители λ_i называются **множителями Лагранжа**.

Теорема 1. Пусть x^* решение задачи (2.2.1) – (2.2.2) на минимум или максимум, то существует вектор

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$$

такой, что

$$\frac{\partial L(x^*,\ \lambda^*)}{\partial x_i} = 0\,, \qquad i = \overline{1,n} \qquad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial L(x^*,\ \lambda^*)}{\partial \lambda_j} = 0\,, \qquad j = \overline{1,m} \qquad (2.2.8)$$

Эта теорема дает необходимые условия экстремума. Заметим, что равенства (2.2.8) совпадают с равенствами (2.2.2), поэтому на допустимом множестве

$$L(x,\lambda^*) = f(x)\,.$$

Пусть x^* решение задачи, а λ^* – набор найденных множителей Лагранжа. Тогда

$$L(x^*,\lambda^*) = f(x^*) = \min_{x \in U} L(x,\lambda^*)\ .$$

Перейдем к достаточным условиям экстремума. Знак приращения

$$\Delta L = L(x,\lambda^*) - L(x^*,\lambda^*)$$

определяется вторым дифференциалом

$$d^2L(x^*,\lambda^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\,\partial x_j}\Delta x_i\,\Delta x_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_j}d^2x_j\ .$$

Здесь, вообще говоря, вторые дифференциалы $d^2x_j \neq 0$, но в силу необходимых условий экстремума последняя сумма равна нулю.

Теорема 2. Пусть (x^*, λ^*) определяет точку минимума в задаче (2.2.1) – (2.2.2) согласно теореме 1 и квадратичная форма

$$d^2L(x^*, \lambda^*) = \langle\, L''_{xx}(x^*,\ \lambda^*)\, \Delta x, \Delta x\, \rangle$$

положительно определена на множестве U, тогда точка x^* является точкой локального минимума в задаче (2.2.1) – (2.2.2). Здесь

$$d^2L(x^*, \lambda^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^*,\ \lambda^*)}{\partial x_i\, \partial x_j}\ \Delta x_i\, \Delta x_j\ .$$

Если матрица

$$L''_{xx} = \left\| \frac{\partial^2 L(x^*,\ \lambda^*)}{\partial x_i\, \partial x_j} \right\|$$

положительно определена, то условия теоремы выполнены. В противном случае надо решить систему (2.2.3) относительно зависимых переменных и выразить d^2L через независимые приращения. Мы получим новую квадратичную форму, и в случае ее положительной определенности точка x^* будет точкой минимума.

Решение задачи на максимум проводится аналогичным образом. Заметим, что точка x^*, удовлетворяющая теореме 1, может не быть точкой экстремума, а является седловой точкой.

Пример. Рассмотрим задачу

$$f(x,y) \to extrem\,, \quad \varphi(x,y) = 0\,.$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y)\,.$$

Уравнения (2.2.7), (2.2.8) имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad \varphi(x,y) = 0\,.$$

Пусть $P(x_0, y_0, \lambda_0)$ – любое решение этой системы. Достаточные условия экстремума можно привести к следующему виду. Рассмотрим определитель

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(P) & \varphi'_y(P) \\ \varphi'_x(P) & L''_{xx}(P) & L''_{xy}(P) \\ \varphi'_y(P) & L''_{yx}(P) & L''_{yy}(P) \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta < 0$, то функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) условный максимум, если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) условный минимум, если $\Delta = 0$, то (x_0, y_0) – седловая точка.

2. 3. Смысл множителей Лагранжа

Множители Лагранжа λ_i^* характеризуют чувствительность оптимального значения целевой функции к изменению правой части в ограничениях вида $g_i(x) = b_i$.

Подобные ограничения встречаются в задачах экономического характера, например, в виде затрат на определенные ресурсы или цен некоторых изделий.

Рассмотрим простейший пример

$$f(x_1, x_2) \to min$$

$$g(x_1, x_2) = b\ .$$

Стационарная точка (x^*, λ^*) функции Лагранжа

$$L = f(x) + \lambda\,(g(x) - b)\,,$$

$x = (x_1, x_2)$ удовлетворяет теореме 1.

$$f(x^*) = L(x^*,\ \lambda^*) = f^*$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial b} = \frac{\partial f^*}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial b} + \frac{\partial f^*}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial b}\ . \qquad (2.3.1)$$

С другой стороны из равенства $g(x) - b = 0$ следует

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial b} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial b} - 1 = 0 \ . \qquad (2.3.2)$$

Умножим равенство (2.3.2) на λ^* и прибавим к (2.3.1). Получим

$$\frac{\partial f^*}{\partial b} = -\lambda^* + \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_i} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial b} \ .$$

Но выражения в скобках равны нулю в силу теоремы 1. Поэтому

$$\frac{\partial f^*}{\partial b} = -\lambda^* \ .$$

Это выражение показывает, что модуль скорости изменения целевой функции при изменении b равен $|\lambda^*|$.

Аналогично, в случае многих ограничений вида $g_i(x) = b_i$ можно получить

$$\frac{\partial f^*}{\partial b_i} = -\lambda_i^* \ .$$

2. 4. Условия оптимальности в задачах выпуклого программирования

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$f(x) \to \min \qquad (2.4.1)$$

$$g_i(x) \le 0\,, \quad i = \overline{1,m}$$

где: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$;

$f(x), g_i(x)$ – выпуклые функции.

Пусть допустимое множество U удовлетворяет **условию Слейтора**, которое означает, что существует точка $x_0 \in U$, такая, что некоторая ее окрестность принадлежит множеству U. В данном случае это означает строгое выполнение всех неравенств

$$g_i(x_0) < 0\,, \quad i = \overline{1,m} \qquad (2.4.2)$$

Если в каждой точке $x_0 \in U$ выполняется неравенство

$$g_i(x_0) < 0\,,$$

то ограничение $g_i(x)$ называется **пассивным** в этой точке. Для внутренней точки множества U все ограничения пассивные, а в граничной точке хотя бы одно из ограничений обращается в равенство, т. е. $g_i(x_0) = 0$ хотя бы для одного i. Ограничение $g_i(x_0) = 0$ называется **активным** в точке x_0.

Обозначим через $I(x_0)$ множество активных ограничений в точке x_0

$$I(x_0) = \{i\ (g_i(x_0) = 0, i = \overline{1,m})\}\ .$$

Введем дополнительные переменные z_i, $i = \overline{1,m}$ и перейдем от неравенств к равенствам

$$g_i(x) + z_i^2 = 0, \quad i = \overline{1,m}\ .$$

Получаем задачу на условный экстремум. Функция Лагранжа имеет вид

$$L = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ (g_i(x) + z_i^2). \qquad (2.4.3)$$

Дифференцируя функцию Лагранжа, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (2.4.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = 2\,\lambda_i\, z_i = 0 \qquad (2.4.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x) + z_i^2 = 0 \qquad (2.4.6)$$

$$i = \overline{1, m}$$

Очевидно равенство (2.4.6) эквивалентно неравенству $g_i(x) \leq 0$. Умножая (2.4.5) на $\frac{z_i}{2}$ получим

$$\lambda_i\, z_i^2 = 0\,, \quad \text{или} \quad \lambda_i\, g_i(x) = 0\,.$$

Введем новую функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, g_i(x)\,.$$

Дифференцируя эту функцию, получаем

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} = 0\,, \quad j = \overline{1, n} \qquad (2.4.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x) \le 0 \qquad (2.4.8)$$

$$\lambda_i \, g_i(x) = 0 \,, \quad i = \overline{1,m} \; . \qquad (2.4.9)$$

Условие дополнительной нежесткости (2.4.9) означает, что хотя бы один из множителей обращается в нуль. Если $\lambda_i \ne 0$, то $g_i(x) = 0$ и ограничение с номером i является активным. Если $g_i(x) \le 0$ (пассивное ограничение), то $\lambda_i = 0$. Кроме того

$$-f'(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i'(x) \, .$$

Откуда следует, что антиградиент $\left(-f'(x)\right)$, т. е. направление убывания целевой функции, в точке минимума является линейной комбинацией внешних нормалей к активным ограничениям. Имеет место следующая теорема.

Теорема

Пусть (x^*, λ^*) – решение системы (2.4.7) – (2.4.9), тогда $\lambda_i^* \ge 0$ для всех $i = \overline{1,m}$.

Таким образом, можно сформулировать следующие необходимые условия минимума с допустимым множеством, удовлетворяющим условиям Слейтера.

Если x^* является решением задачи выпуклого программирования, то для некоторых чисел $\lambda_i^*,\ i=\overline{1,m}$, выполняются соотношения:

$$\lambda_i^* \geq 0\ , \qquad i=\overline{1,m} \tag{2.4.10}$$

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\ \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}=0\,, \quad j=\overline{1,n} \tag{2.4.11}$$

$$\lambda_i^*\ g_i(x^*)=0\,, \quad i=\overline{1,m}\ . \tag{2.4.12}$$

$$g_i(x^*)\leq 0, \quad i=\overline{1,m}\ . \tag{2.4.13}$$

Эти условия называются **условиями Куна-Таккера**. Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема Куна - Таккера

Для того, чтобы точка $x^* \in E_n$ была решением задачи выпуклого программирования (2.4.1) достаточно (а если допустимое множество удовлетворяет условию Слейтера, то и необходимо), чтобы существовал вектор

$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*)$ для которого выполняются условия (2.4.10) – (2.4.13).

2. 5. Задача квадратичного программирования

В этой задаче требуется минимизировать выпуклую квадратичную функцию на допустимом множестве U, заданном линейными ограничениями – неравенствами:

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \to min \qquad (2.5.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, x_j \le \beta_i\ , \qquad i = \overline{1, m} \qquad (2.5.2)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\ , \qquad x_j \ge 0\ , \qquad j = \overline{1, n} \qquad (2.5.3)$$

Здесь $A = \|\alpha_{ij}\|$ симметрическая положительно определенная матрица размерности $n \times n,\ b \in E_n,\ c \in R$. Так как целевая функция выпукла, а ограничения линейны, то это задача выпуклого программирования и применима теорема Куна – Таккера.

Ограничения можно записать в виде:

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, x_j - \beta_i \le 0 \qquad (2.5.4)$$

$$\widetilde{g_j}(x) = -\, x_j \le 0 \qquad (2.5.5)$$

Составим функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, x_j - \beta_i \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(-\, \mu_j\, x_j\right) \ .$$

Запишем условия Куна - Таккера:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i + b_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij} - \mu_j = 0 \ , \qquad j = \overline{1,n}$$

$$\lambda_i\, g_i(x) = 0 \, , \qquad\qquad i = \overline{1,m}$$

$$\mu_j\, \widetilde{g_j}(x) = 0 \, , \qquad\qquad j = \overline{1,n}$$

$$\lambda_i \geq 0 \, , \qquad\qquad \mu_j \geq 0 \, .$$

Эти ограничения включают в себя и ограничения задачи (2.5.4) – (2.5.5) . Введем дополнительные переменные $x_{n+1} \geq 0$, $i = \overline{1,m}$ и перейдем в (2.5.4) от неравенств к равенствам

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, x_j - \beta_i + x_{n+1} = 0 \qquad (2.5.6)$$

$$\lambda_i\, x_{n+1} = 0 \qquad (2.5.7)$$

В итоге условия Куна – Таккера для задачи квадратичного программирования можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij} - \mu_j = -b_j \qquad (2.5.8)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, x_j + x_{n+1} = \beta_i \qquad (2.5.9)$$

$$i = \overline{1, m}$$

$$x_k \geq 0\,, \qquad k = \overline{1, n+m}\,,$$

$$\lambda_i \geq 0\,, \qquad i = \overline{1, m}\,, \qquad \mu_j \geq 0\,, \qquad j = \overline{1, n}$$

$$\lambda_i\, x_{n+1} = 0\,, \qquad \mu_j\, x_j = 0 \qquad (2.5.10)$$

$$i = \overline{1, m}\,, \qquad j = \overline{1, n}$$

Задача (2.5.8) – (2.5.10) является задачей линейного программирования с целевой функцией

$$\widetilde{f} = \sum_{i=1}^{m} x_{n+1} \rightarrow min\,.$$

В итоге задача квадратичного программирования сведена к задаче линейного программирования с дополнительными условиями $(2.5.10)$, методы решения которой считаются известными.

3. Вопросы существования решения

3. 1. Условия существования минимума в задачах математического программирования

Теоремы Каруша – Джона и Куна – Таккера дают только необходимые условия существования решения. Вопрос о существовании глобального минимума на всем множестве U остается открытым.

Теорема

Если выполнены условия существования локального минимума и функция растет на бесконечности, т. е.

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty \ ,$$

то существует глобальный минимум. Здесь $\|x\|$ – норма вектора $x \in E_n$.

В общем случае можно пользоваться топологическими теоремами о существовании минимума на компакте. Заметим, что уже у функции двух переменных может существовать много точек локального минимума и при этом ни одной точки локального максимума. При этом ни один из минимумов не будет глобальным (наклонная плоскость с ямами).

3. 2. Достаточные условия экстремума

При безусловной минимизации достаточным условием минимума является положительная определенность матрицы Гессе целевой функции. При условной минимизации ситуация аналогична.

Теорема

Если все функции в задаче условной минимизации имеют непрерывные частные производные второго порядка по всем переменным, x^* – удовлетворяет необходимым условиям экстремума, λ^* – соответствующий вектор множителей Лагранжа, $\lambda^* = (\lambda_1^*,\ \lambda_2^*, \dots, \lambda_1^*)$, $\lambda_i^* > 0,\ i = \overline{1, m}$ и матрица

$$.\ \nabla_x^2 L(x,\ \lambda^*) = \left\| \frac{\partial^2 L(x, \lambda^*)}{\partial x_i\, \partial x_j} \right\|$$

положительно определена, то в точке x^* – локальный минимум.

Аналогичная теорема верна и для задач нелинейного программирования, если учитывать только активные неравенства.

3. 3. Принцип Ле Шателье – Самуэльсона

Рассмотрим задачу

$$\varphi(x, \lambda) \to min \ , \qquad x \in x_\lambda \ , \quad \lambda \in \Lambda \ ,$$

где x и λ – векторы.

Обозначим множество решений этой задачи при данном λ через $\Omega(\lambda)$. При $x_1 \in \Omega(\lambda_1)$ и $x_2 \in \Omega(\lambda_2)$ имеем неравенства

$$\varphi(x_1, \lambda_1) \le \varphi(x_2, \lambda_1)$$

$$\varphi(x_2, \lambda_2) \le \varphi(x_1, \lambda_2)$$

по определению множеств $\Omega(\lambda_1)$ и $\Omega(\lambda_2)$. Умножим последнее неравенство на (-1) и сложим с первым неравенством. Получим

$$\varphi(x_1, \lambda_1) - \varphi(x_1, \lambda_2) \le \varphi(x_2, \lambda_1) - \varphi(x_2, \lambda_2) \ .$$

Предположим, что $x_\lambda = R^n$, $\Lambda = R^n$ и

$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) + (\lambda, x) \ ,$$

где (λ, x) – скалярное произведение векторов λ и x.

Из предыдущего неравенства получаем

$$(\lambda_1, x_1) - (\lambda_2, x_1) \leq (\lambda_1, x_2) - (\lambda_2, x_2) \ ,$$

или $$(\lambda_1 - \lambda_2 \, , \ x_1 - x_2) \leq 0 \, .$$

Это неравенство называется **неравенством Ле Шателье – Самуэльсона** для экстремальных задач. Оно характеризует реакцию системы на внешние условия. Если система в естественных условиях стремится к минимизации некоторой функции, например, отрицательной энтропии в термодинамике, то при увеличении внешнего параметра λ система реагирует так, чтобы уменьшить данную функцию (изменение x с x_1 на x_2).

В экономической системе λ может означать цену некоторого товара, а x – количество его продаж, тогда неравенство

$$(\lambda_1 - \lambda_2 , x_1 - x_2) \leq 0$$

означает, что увеличение цены $\lambda_1 < \lambda_2$ влечет уменьшение объема продаж $x_1 > x_2$. В случае более сложных функций можно получить более сложные зависимости.

3. 4. Условия оптимизации без условий на производные

Определение. Точка $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ называется седловой точкой функции Лагранжа в задаче выпуклого программирования, если $L(x^*, \lambda) \le L(x^*, \lambda^*) \le L(x, \lambda^*)$ для всех $x \in U$ и всех $\lambda_i \ge 0 \quad i = 1, m$.

Можно показать, что необходимыми и достаточными условиями для седловой точки функции Лагранжа является следующее

$$L(x^*, \lambda^*) = \min_{x \in U} L(x, \lambda^*) = \max_{\lambda \ge 0} L(x^*, \lambda)$$

$$\lambda_i^* \, g_i(x^*) = 0\,, \qquad i = \overline{1, m}$$

Теорема Куна – Таккера

Для того, чтобы точка $x^* \in E_n$ была решением задачи выпуклого программирования, допустимое множество которой удовлетворяет условию Слейтора, необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $\lambda^* \in E_m, \quad \lambda_i^* \ge 0, \quad i = \overline{1, m}$ такой, что (x^*, λ^*) – седловая точка функции Лагранжа этой задачи.

Задачи математического программирования со смешанными ограничениями решаются с помощью теоремы Каруша – Джона.

Теорема

Минимакс всегда больше максимина, т. е.

$$\min_{x}\ \max_{y}\ \varphi(x,y) \geq \max_{y}\ \min_{x}\ \varphi(x,y)\ ,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\varphi(x,y)$ имеет седловую точку (x^*,λ^*), при этом

$$\min_{x}\ \max_{y}\ \varphi(x,y) = \max_{y}\ \min_{x}\ \varphi(x,y) = \varphi\,(x^*,\lambda^*)\ .$$

Доказательство. Минимизация обеих частей очевидного неравенства

$$\max_{y}\ \varphi(x,y) \geq \varphi(x,y)$$

приводит к неравенству

$$\min_{x}\ \max_{y}\ \varphi(x,y) \geq \min_{x}\ \varphi(x,y)\,.$$

Так как слева стоит постоянная, то

$$\min_{x}\ \max_{y}\ \varphi(x,y) \geq \max_{y}\ \min_{x}\ \varphi(x,y)\,.$$

3. 5. Двойственность в выпуклом программировании

Запишем функцию Лагранжа в более симметричном виде, заменив вектор λ на вектор y той же размерности. Тогда функция Лагранжа примет вид $L(x, y)$. Положим

$$S(x) = sup \ \{ L(x, y), y \geq 0 \},$$

полагая $S(x) = +\infty$, если при данном x $L(x, y)$ не ограничена по y.

С помощью $S(x)$ задача минимизации может быть записана в виде $S(x) \to min, \quad x \in Q$.

Если ввести функцию

$$R(y) = inf \ \{L(x, y), x \in Q \},$$

то задача имеет вид $R(y) \to max, \quad y \geq 0$.

Двойственность проявляется в том, что седловая точка (x^*, λ^*) является решением и той и другой задачи.

Теорема

Для любых допустимых значений x и y имеет место неравенство $f(x) \geq R(y)$ переходящее в равенство $f(x^*) = R(y^*)$ тогда и только тогда, когда (x^*, λ^*) – седловая точка функции Лагранжиана, а значит x^* – решение прямой задачи, а y^* – двойственной.

4. Методы приближенного решения задач математического программирования

4. 1. Методы возможных перемещений

При построении вычислительных алгоритмов методов этой группы используются понятия возможного направления и направления убывания целевой функции для точек допустимого множества U задачи выпуклого программирования.

Основу алгоритма составляет итерационный процесс

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k \ p_k , \qquad (4.1.1)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots , \quad x_0 \in U$$

Вектор p_k , определяющий направление перемещения из точки x_k в точку x_{k+1} , должен удовлетворять следующим двум условиям:

1. Для достаточно малых $\alpha_k > 0$ точка x_{k+1} принадлежит допустимому множеству, т. е. p_k задает возможное направление

2. Для достаточно малых $\alpha_k > 0$ выполняется неравенство $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, т. е. p_k определяет направление убывания целевой функции. Величина $\alpha_k > 0$, как правило, выбирается из условия исчерпывающего спуска в направлении p_k с учетом требования $x_{k+1} \in U$.

Рассмотрим более подробно случай линейных ограничений. Пусть дана задача:

$$f(x) \to min, \quad x \in E_n \tag{4.1.2}$$

$$\langle a_i, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i \tag{4.1.3}$$

$$i = \overline{1,m}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{4.1.4}$$

где целевая функция выпукла и имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Будем решать задачу с помощью метода $(4.1.1)$. Опишем сначала правила выбора вектора p_k для очередной точки x_k. Будем считать, что дана начальная точка x_0, т. е. решение системы $(4.1.3)-(4.1.4)$ нам известно. Возможны два случая.

1. Точка x_k является внутренней точкой множества U, т. е. все неравенства $(4.1.3)-(4.1.4)$ выполнены в этой точке строго, тогда полагают

$$p_k = -f'(x_k), \qquad (4.1.5)$$

где: $f'(x_k) = \overrightarrow{grad} f(x_k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

2. Пусть хотя бы одно из неравенств $(4.1.3)-(4.1.4)$ в точке обращается в равенство, т. е. x_k является граничной точкой множества U. Тогда направление $(4.1.5)$ не является, вообще говоря, допустимым. Можно привести следующие соображения по выбору вектора p_k в этом случае. С одной стороны p_k должен быть направлен внутрь множества U или вдоль его границы. С другой стороны p_k должен составить с направлением наискорейшего убывания $f(x)$, т. е. с антиградиентом $\left(-f'(x_k)\right)$ возможно наименьший угол. Поиск p_k с такими свойствами можно свести к задаче линейного программирования.

Обозначим через I_k и J_k множества индексов, соответствующих активным ограничениям, т. е.

$$I_k = \left\{ i \,/\, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_{j_k} = b_i \right\} \qquad (4.1.6)$$

$$J_k = \left\{ j \,/\, x_{j_k} = 0 \right\} \qquad (4.1.7)$$

Соотношения $(4.1.6)$, $(4.1.7)$ означают, что точка $x_k = \left(x_{1_k}, x_{2_k}, \dots, x_{n_k}\right)$ принадлежит гиперплоскостям

$$\langle\, a_i, x \,\rangle = b\,, \qquad i \in I_k\,;$$

$$\langle\, e_j, x \,\rangle = 0\,, \qquad j \in J_k\,,$$

где $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, единица стоит на –ом месте.

Покажем, что a_i и $\left(-e_j\right)$ нормальные векторы к указанным гиперплоскостям направленные из допустимого множества U. В самом деле, гиперплоскость $\langle\, a_i, x \,\rangle = b_i$ есть поверхность уровня функции $\Phi_i(x) = \langle\, a_i, x \,\rangle$, соответствующая значению b_i этой функции. Значит градиент $\Phi_i'(x_k) = a_i$ – это вектор нормальный к данной гиперплоскости и направленный в сторону увеличения данной функции. Таким образом, при перемещении вдоль вектора a_i значение $\Phi(x_k)$ увеличивается и неравенство (4.1.4) или (4.1.3) перестает выполняться. Следовательно, нормальный вектор a_i направлен из множества U. Аналогичные рассуждения можно провести и для вектора $(-e_j)$, записав ограничение (4.1.4) в виде $\langle -e_j, x \rangle \le 0$.

Очевидно, направление вектора p_k из точки x_k по отношению к множеству U будет возможным, если он образует с соответствующими нормальными векторами a_i, $i \in I_k$; $(-e_j)$, $j \in J_k$ тупые углы, т. е.

$$\langle a_i, p_k \rangle \le 0 , \quad i \in I_k \tag{4.1.8}$$

$$- \langle e_j, p_k \rangle \le 0 , \quad j \in J_k .$$

Последнее неравенство можно записать в виде

$$p_{j_k} \ge 0 , \quad j \in J_k \tag{4.1.9}$$

Рассмотрим теперь второе из упомянутых условий. Так как скалярное произведение двух векторов постоянной длины есть убывающая функция угла φ между ними при $\varphi \in [0, \pi]$, то минимальному углу между векторами p_k и $(-f'(x_k))$ соответствует максимум скалярного произведения $\langle\, p_k,\ \left(-f'(x_k)\right) \rangle$ или минимум противоположной величины

$$F(p_k) = \langle\, f'(x_k)\,,\, p_k \,\rangle \to min \qquad (4.1.10)$$

Однако минимум этой целевой функции не достигается (она не ограничена снизу), если на норму p_k не наложить ограничение, например, $\parallel p_k \parallel \le 1.$

Для того, чтобы оставаться в рамках линейного программирования, рассмотрим норму

$$\parallel p \parallel = |p_1| + |p_2| + \cdots + |p_n|\,.$$

Если $J_k \neq \emptyset$, то среди переменных $p_{1_k}, p_{2_k}, \dots, p_{n_k}$ есть заведомо неотрицательные, а именно, переменные с номерами $j \in J_k$. Остальные переменные запишем в виде

$$p_j = p_j^+ - p_j^-\,, \qquad j \notin J_k$$

$$p_j^+ \ge 0\,, \qquad p_j^- \ge 0\,, \qquad p_j^+\, p_j^- = 0\,.$$

В итоге поиск вектора p_k сведен к задаче линейного программирования. Для практического применения этого метода надо иметь компьютерную программу решения задачи линейного программирования.

Полная формулировка этой задачи линейного программирования выглядит так:

$$\sum_{j\in J_k} \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_j}\, p_j + \sum_{j\notin J_k} \left(p_j^+ - p_j^-\right) \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_j} \to min$$

$$\sum_{j\in J_k} a_{ij}\; p_j + \sum_{j\notin J_k} a_{ij} \left(p_j^+ - p_j^-\right) \le b_i\,, \qquad i \in I_k$$

$$\sum_{j\in J_k} p_j + \sum_{j\notin J_k} \left(p_j^+ - p_j^-\right) \le 1$$

$$p_j \ge 0\,, \quad j \in J_k\,, \qquad p_j^+ \ge 0\,, \quad j \notin J_k\,,$$

$$p_j^- \ge 0\,, \qquad j \notin J_k\,, \qquad p_j^+\, p_j^- = 0.$$

Последнее условие нетипично для задачи линейного программирования, однако может быть включено в алгоритм ее решения.

Опишем теперь как определить величину шага α_k при известном p_k

$$\alpha_k\, min\ \{\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_m},\ \widehat{\alpha_1},\ \widehat{\alpha_2}, \dots,\ \widehat{\alpha_n},\ \alpha^*\}\,,$$

где α^* – шаг при безусловной минимизации. Положим

$$\Phi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha\, p_k)\,, \qquad \alpha \ge 0\,.$$

Тогда

$$\Phi_k(\alpha^*) = \min_{\alpha \geq 0} \Phi\,(\alpha)\,.$$

Остальные ограничения задаются границами множества U

$$\overline{\alpha_i} = \begin{cases} +\infty\,, & \text{если} \quad \langle\, a_i,\, p_k \,\rangle \leq 0 \\ \dfrac{b_i - \langle\, a_i, x_k \,\rangle}{\langle\, a_i,\, p_k \,\rangle}\,, & \text{если} \quad \langle\, a_i,\, p_k \,\rangle > 0 \end{cases};$$

$$i = \overline{1, m}$$

$$\widehat{\alpha_j} = \begin{cases} +\infty\,, & \text{если} \quad p_{j_k} \geq 0 \\ -\,\dfrac{x_{j_k}}{p_{j_k}}\,, & \text{если} \quad p_{j_k} < 0 \end{cases}.$$

$$j = \overline{1, n}$$

4. 2. Метод штрафных функций

Основная идея этой группы методов состоит в преобразовании задачи нелинейного программирования

$$f(x) \to min\,, \quad x \in U$$

в последовательность задач безусловной минимизации

$$f_k(x) = f(x) + \varphi_k(x) \to min$$

$x \in E_n$, $k = 1, 2, \dots$, где $\varphi_k(x)$ – функции, которые с ростом k во все большей степени учитывают ограничения, определяющие допустимое множеству U.

В качестве решения исходной задачи берется решение x_k вспомогательной задачи, соответствующее достаточно большому значению K.

В методе штрафных функций $\varphi_k(x)$ подбирают так, чтобы при больших K функция $f_k(x)$ мало отличалась от $f(x)$ при $x \in U$ и быстро возрастала при удалении от U.

Определение. Пусть $U \subset E_n$ заданное множество, последовательность функций $\{\varphi_k(x)\}$, определенных в E_n и обладающих свойством

$$\lim_{K\to\infty} \varphi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in U \\ \infty & \text{при} \quad x \notin U \end{cases}$$

называется **последовательностью штрафных функций** для множества U.

Пусть $\{A_k\}$ какая-либо возрастающая числовая последовательность с положительными числами и

$$\lim_{K\to\infty} A_k = \infty\,,$$

$\varphi(x)$ – функция такая, что $\varphi(x) = 0$ при $x \in U$ и $\varphi(x) > 0$ при $x \notin U$. Тогда последовательность $\varphi_k(x) = A_k\,\varphi(x)$ есть последовательность штрафных функций.

На практике часто полагают $A_k = K$. В качестве функции $\varphi(x)$ можно взять $\rho(x, U)$ – расстояние от точки до множества U, тогда получаем последовательность штрафных функций $\varphi_k(x) = K\,\rho(x, U)$.

Однако вычисление расстояния $\rho(x,U)$ в случае сложного U может оказаться затруднительным. Поэтому часто применяют штрафные функции более удобного вида.

Пусть множество U задано неравенствами

$$g_i(x) \le 0\,, \qquad i = \overline{1,m}\,,$$

где: $g_i(x)$ – выпуклые функции. Тогда в качестве $\varphi(x)$ можно взять

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \psi\big(g_i(x)\big)\,,$$

где $\psi(x)$ – непрерывная функция, причем $\psi(t) = 0$ при $t \le 0$ и $\psi(t) > 0$ при $t > 0$. Последовательность $A_k\,\varphi(x)$ является последовательностью штрафных функций. Функцию $\psi(t)$ можно выбрать и так, чтобы функции $\varphi_k(x)$ обладали свойствами, упрощающими решение вспомогательных задач минимизации. Например, таких как выпуклость, существование производных, простота вычислений. Часто используют

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \big(g_i^{+}(x)\big)^2\,,$$

где

$$g_i^+(x) = \max\{0, g_i(x)\} = \frac{1}{2}(\, g_i(x) + |g_i(x)|\,)\,.$$

Пример. $f(x) = x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \to min$,

$x = (x_1, x_2) \in E_2$, $x_2 - x_1 - 2 \leq 0$, $x_1^2 - 2x_2 \leq 0$.

Запишем последовательность задач минимизации

$$f_k(x) = x_1^2 + (x_2 - 4)^2 + K\big(g_1^+(x)\big)^2 + K\big(g_2^+(x)\big)^2 \to min\ ,$$

где:

$$g_1^+(x) = \frac{1}{2}(\, x_2 - x_1 - 2 + |x_2 - x_1 - 2|\,)\,;$$

$$g_2^+(x) = \frac{1}{2}(\, x_1^2 - 2x_2 + |x_1^2 - 2x_2|\,)\,.$$

При $K = 100$ получаем решение

$x_{1_k} = 0,995$, $x_{2_k} = 3{,}005$. Точное решение $x^* = (1{,}3)$.

В качестве критерия остановки можно взять

$$\left\| x_K - x_{\frac{K}{2}} \right\| \leq \varepsilon \ ,$$

K – четное число, $x^* = x_K$, $\quad f^* = f(x_K)$.

4. 3. Метод барьерных функций

В этом методе исходная задача математического программирования также сводится к последовательности задач безусловной минимизации. Но функции $\varphi_k(x)$ выбираются таким образом, чтобы при больших K функция $f_k(x)$ мало отличалась от $f(x)$ во внутренних точках множества U и в то же время при приближении точки $x \in U$ к границе множества U эта функция неограниченно возрастала.

Определение. Последовательность функций $\{\varphi_k(x)\}$ называется **последовательностью барьерных функций** для задачи оптимизации, если

1.

$$\lim_{K\to\infty} \varphi_k(x) = 0$$

для $x \in U_0$, где U_0 внутренность множества U;

2.

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_k(x_r) = +\infty$$

для любой последовательности точек $x_r \in U_0$, $r = 1, 2, \dots$, $x_r \to \partial U$ при $r \to \infty$, где ∂U – граница множества U.

Таким образом, влияние барьерной функции $\varphi_k(x)$ при больших K состоит в создании барьера с крутыми склонами вдоль границы U. Пусть $\{B_k\}$ последовательность положительных чисел,

$$\lim_{K \to \infty} B_k = 0\,,$$

например, $B_k = \frac{1}{K}$, а функция $\varphi(x)$ определена при $x \in U_0$ и стремится к ∞ при $x \to \partial U$, тогда $\varphi_k(x) = B_k\,\varphi(x)$ есть последовательность барьерных функций.

Если допустимое множество задачи математического программирования определяется системой

$$g_i(x) \le 0\,, \qquad i = \overline{1, m}\,,$$

то в качестве $\varphi(x)$ можно взять

$$\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}\,,$$

тогда

$$f_k(x) = f(x) - \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)} \ .$$

Барьерные функции могут быть заданы и другими способами:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m}\left(g_i(x)\right)^{-p} \ , \qquad p > 0 \, ,$$

$$\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{m} ln\left(-g_i(x)\right)$$

и так далее. Как и в методе штрафных функций в качестве условий остановки можно пользоваться неравенствами

$$\left\| x_K - x_{\frac{K}{2}} \right\| \leq \varepsilon \ .$$

Пример. $f(x) = x \to min \ , \qquad -x + 2 \leq 0 \, .$

Введем штрафные функции

$$f_k(x) = x + \frac{1}{K}\,\frac{1}{x-2}$$

Найдем экстремум этой функции

$$f'(x_k) = 1 - \frac{1}{K}\,\frac{1}{(x-2)^2} = 0\,.$$

Отсюда получаем

$$x = 2 + \frac{1}{\sqrt{K}}\ .$$

При $K = 100$ получаем $x_k = 2{,}1$.

Точное решение $x^* = 2.$

Св. план 2018 г., поз. 54

Аверинцев Михаил Борисович
Корниенко Нина Амосовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Конспект лекций

для студентов специальности ТКИ

Тираж 100 экз.

Москва, Копировальный центр Printside