



Министерство транспорта Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Российский университет транспорта (МИИТ)»

---

Институт пути, строительства и сооружений

Кафедра «Строительная механика»

А.М. Лукьянов, М.А. Лукьянов, И.И. Монахов

## **ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ**

Учебное пособие  
*по дисциплине «Сопротивление материалов»*

**Москва - 2018**



Министерство транспорта Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Российский университет транспорта (МИИТ)»

---

Институт пути, строительства и сооружений

Кафедра «Строительная механика»

А.М. Лукьянов, М.А. Лукьянов, И.И. Монахов

## **ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ**

Учебное пособие

для электромеханических специальностей

**Москва - 2018**

УДК 539

Л 84

Лукьянов А.М., Лукьянов М.А., Монахов И.И.  
Геометрические характеристики плоских сечений: Учебное пособие. - М.: РУТ (МИИТ), 2018. – 32: ил.

Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей, изучающих дисциплину «Сопротивление материалов», «Прикладная механика», «Техническая механика».

В нем излагаются основные теоретические сведения, рассматривается решение типовых задач. Основная цель пособия – помочь выработке навыков решения типовых задач при выполнении расчетов на прочность, жесткость и устойчивость. Учебное пособие следует рассматривать как дополнение к лекциям и указанной учебной литературе.

Рецензенты: доктор технических наук, профессор С.Б. Косицын (РУТ (МИИТ)), кандидат технических наук, доцент В.И. Иванов-Дятлов (МАДИ).

© РУТ (МИИТ), 2018

## Введение

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей, изучающих раздел «Геометрические характеристики плоских сечений». Оно содержит краткие основные сведения из теории и характерные примеры с решениями. Более подробно вопросы теории и задачи приведены в учебной литературе:

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М: Высшая школа, 2012. – 560 с.

2. Лукьянов А.М., Лукьянов М.А. Сопротивление материалов. Учебное пособие для вузов ж.- д. транспорта. – М.: ГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2017. – 572 с.

3. Лукьянов А.М., Лукьянов М.А. Сборник задач по сопротивлению материалов. В 2 кн.. Учеб. пособие для вузов ж.д. транспорта – М.: ГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте». Маршрут, 2016 – 214 с.: ил.

### 1. Основные понятия

В формулы для определения напряжений и перемещений в зависимости от вида деформации входят различные характеристики поперечных сечений стержня, которые зависят от его формы и размеров.

Пусть поперечное сечение стержня представляет собой плоскую фигуру произвольного очертания площадью  $A$  в системе координат  $XOY$  (рис. 1). Выделим элемент площади  $dA$  с координатами  $x$  и  $y$  и введем следующие геометрические характеристики:

-статические моменты относительно осей  $x$  и  $y$

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA \quad (1)$$

-осевые моменты инерции относительно осей  $x$  и  $y$

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (2)$$

-центробежный момент инерции относительно осей  $x$  и  $y$

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (3)$$

-радиусы инерции относительно осей  $x$  и  $y$

$$i_x = \sqrt{I_x / A}, \quad i_y = \sqrt{I_y / A} \quad (4)$$

- полярный момент инерции

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA \quad (5)$$

Полярный момент инерции относительно точки пересечения двух взаимно перпендикулярных осей, (рис. 1), связан с соответствующими осевыми моментами инерции соотношением

$$I_\rho = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

Справедливость, которого вытекает из равенства  $\rho^2 = x^2 + y^2$

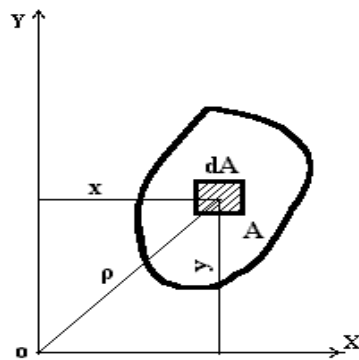


Рис.1.

Статические моменты имеют размерность единицы длины в третьей степени (например,  $m^3$  или  $см^3$ ), а осевые, центробежный и полярный моменты инерции - единицы длины в четвертой степени ( $m^4$  или  $см^4$ ). Статический момент и центробежный момент инерции в зависимости от выбранной системы координат могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Осевой и полярный моменты инерции всегда положительны.

В частном случае, когда одна из осей поперечного сечения является осью симметрии, а вторая - любая ей перпендикулярная, (рис. 2), то центробежный момент инерции сечения относительно этой пары осей равен нулю. Такие оси, называются *главными осями инерции*. В частности, если каждая из этих осей проходит через центр тяжести сечения, то такие оси называются *главными центральными осями инерции сечения*.

Соответствующие им экстремальные осевые моменты инерции называются *главными моментами инерции*. Они соответственно обозначаются  $I_{max}$ ,  $I_{min}$ .

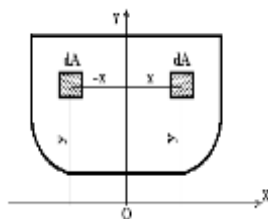


Рис.2

Поперечное сечение сложной формы можно представить в виде совокупности простейших фигур. Тогда при вычислении геометрических характеристик (1) - (4) относительно какой – либо оси их следует вычислять, как сумму простейших фигур относительно той же оси.

## 2. Центр тяжести сечения

Известно [1;2], что координаты центра тяжести сечения  $x_c$  и  $y_c$ , определяются по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (6)$$

Если сечение имеет ось или центр симметрии, то определение положения центра тяжести упрощается – он находится соответственно на оси симметрии или на пересечении этих осей. При вычислении координат центра тяжести сечения, сложной формы его следует разбить на простые составные части (рис. 3,4), для которых известны площади  $A_i$  и координаты центра тяжести  $x_i$  и  $y_i$  в предварительно выбранной вспомогательной системе координат. Так для сечения (см. рис.3) координаты его центра тяжести относительно системы координат  $X_0Y_0$  в соответствии с (6) вычисляются следующим образом:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i x_{ci}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{A^I x_1 + A^{II} x_2 + A^{III} x_3}{A^I + A^{II} + A^{III}}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{A^I y_1 + A^{II} y_2 + A^{III} y_3}{A^I + A^{II} + A^{III}},$$

В качестве вспомогательной системы координат можно использовать другую, например  $X_2C_2Y_2$  (рис. 4), совпадающую с центром тяжести II – й части поперечного сечения. Следует иметь в виду, что при вычислении статических момен-

тов составных частей сечения необходимо учитывать знаки координат их центров тяжести относительно выбранной вспомогательной системы координат.

Таким образом, координаты  $y_c$  и  $x_c$  для сечения на рис. 4 определяется из выражений:

$$y_c = \frac{A^I(-y_{c2}^I) + A^{III} y_{c2}^{III}}{A^I + A^{II} + A^{III}}, \quad x_c = \frac{A^I(-x_{c2}^I) + A^{III} x_{c2}^{III}}{A^I + A^{II} + A^{III}}.$$

В них уже учтено, что статические моменты относительно собственных центральных осей равны нулю.

Выбор различных вспомогательных координатных систем можно использовать для контроля определения, положения центра тяжести сечения.

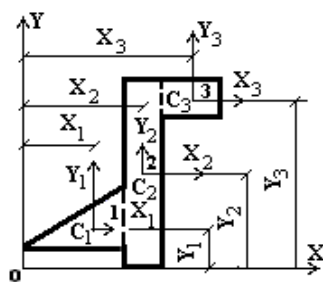


Рис. 3.

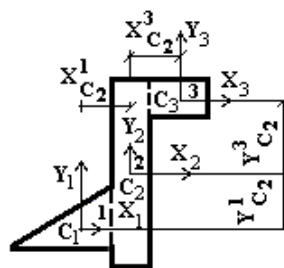


Рис. 4.

**Задача 1.** Определить координаты центра тяжести сечения (рис. 5.) Размеры даны в сантиметрах.

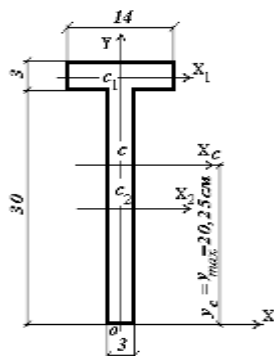


Рис. 5.

*Решение.* Выберем вспомогательную систему осей координат  $UOX$ .

Разобьем сечение на два прямоугольника, так чтобы ось  $u$  совпала с осью симметрии. Две другие оси  $x_1$  и  $x_2$  прошли через центр тяжести каждого прямоугольника. В этой системе координаты центра тяжести прямоугольников будут: первого -  $x_1 = 0$ ;  $y_1 = 31,5$  см; второго -  $x_2 = 0$ ;  $y_2 = 15$  см.

Определим площади поперечного сечения прямоугольников -  $A_1 = 14 \cdot 3 = 42$  см<sup>2</sup>,  $A_2 = 3 \cdot 30 = 90$  см<sup>2</sup>.

По формуле (6) вычисляем координаты центра тяжести поперечного сечения

$$y_c = \frac{14 \cdot 3 \cdot 31,5 + 3 \cdot 30 \cdot 15}{14 \cdot 3 + 30 \cdot 3} = 20,25 \text{ см.}$$

**Задача 2.** Определить координаты центра тяжести коробчатого сечения (рис. 6).

*Решение.* Выберем произвольную систему координат  $XoY$ . Сечение состоит из двух прямоугольников, центры тяжести которых  $C_1$  и  $C_2$  известны и показаны на рис. 6.

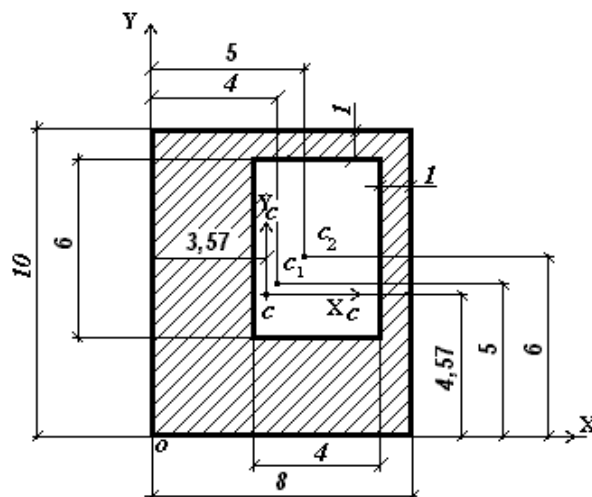


Рис.6.

Определим площадь поперечного сечения и статические моменты всей фигуры относительно выбранных осей.

$$A = A_1 - A_2 = 8 \cdot 10 - 4 \cdot 6 = 56 \text{ см}^2$$

$$S_x = S_{x1} - S_{x2} = 8 \cdot 10 \cdot 5 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 256 \text{ см}^3$$

$$S_y = S_{y1} - S_{y2} = 8 \cdot 10 \cdot 4 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 200 \text{ см}^3$$

Тогда координаты центра тяжести всего сечения можно вычислить следующим образом:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{200}{56} = 3,57 \text{ см}; y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{256}{56} = 4,57 \text{ см}$$



**Задача 3.** Определить положение центра тяжести полукруга рис.7.

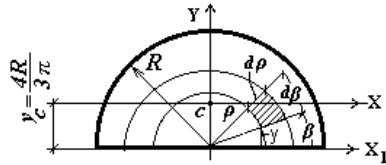


Рис.7.

*Решение.* Направим ось  $y$  по оси симметрии полукруга, а ось  $x_1$  совместим с его основанием. В этом случае  $x_c = 0$ . Определим, координату  $y_c$ . подсчитаем статический момент полусечения непосредственным интегрированием по площади полукруга:

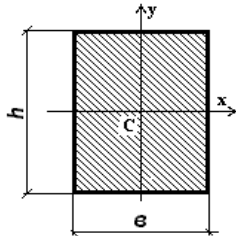
$$S_x = \int_A y dA = \int_A \rho \sin \beta \cdot \rho d\beta d\rho = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \beta d\beta = \frac{2}{3} R^3$$

Используя формулу (6) находим расстояние центра тяжести от основания полукруга:

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Ниже приведены формулы для вычисления: осевых, центробежных и полярного моментов инерции простейших плоских сечений.

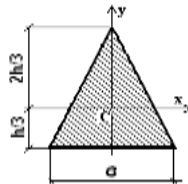
1. Прямоугольник.



$$A = bh; \quad I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{hb^3}{12}; \quad I_{xy} = 0.$$

$$I_\rho = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2).$$

2. Треугольник

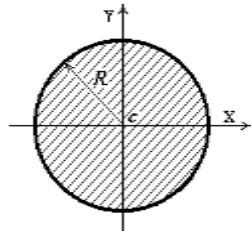


$$A = \frac{bh}{2}; \quad I_x = \frac{bh^3}{36}; \quad I_y = \frac{hb^3}{48};$$

$$I_{xy} = 0.$$

$$I_\rho = \frac{bh}{12} \left( \frac{h^2}{3} + \frac{b^2}{4} \right).$$

3. Круг



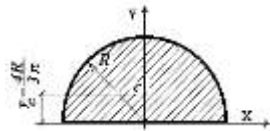
$$A = \pi R^2;$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4};$$

$$I_{xy} = 0;$$

$$I_\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

4. Полукруг

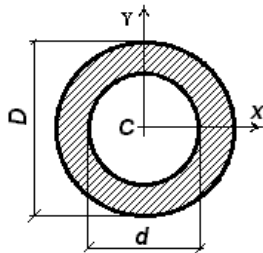


$$A = \frac{\pi R^2}{2};$$

$$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)R^4}{72\pi};$$

$$I_y = \frac{\pi R^4}{8}; I_{xy} = 0.$$

5. Кольцо

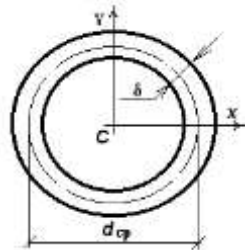


$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2); I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4);$$

$$\alpha = \frac{d}{D}; I_{xy} = 0;$$

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4).$$

6. Кольцо при малых значениях толщины  $\delta$



$$\frac{\delta}{d_{cp}} < 0,15; A = \pi d_{cp} \delta;$$

$$I_{xy} = 0; I_x = I_y = \frac{\pi \delta d_{cp}^3}{8},$$

$$I_{xy} = 0;$$

$$I_\rho = \frac{\pi \delta d_{cp}^3}{4}.$$

### 3. Вычисление моментов инерции при параллельном переносе и повороте осей.

При вычислении моментов инерции сложных сечений возникает необходимость определять их относительно осей, ориентированных различным образом в плоскости. Для этого удобно использовать известные значения моментов инерции простейших плоских сечений относительно собственных центральных осей. В самом общем случае поставленную задачу можно представить как два вида последовательных преобразований - параллельный перенос осей и их поворот.

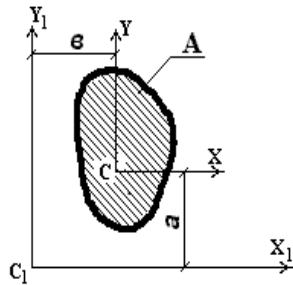


Рис. 8.

Будем считать, что известны моменты инерции  $I_x, I_y, I_{xy}$  относительно осей  $x$  и  $y$ , проходящих через центр тяжести сечения  $c$  (рис.8). Моменты инерции относительно некоторых произвольных осей  $X_1$  и  $Y_1$ , параллельных центральным осям  $X$  и  $Y$ , определяются по формулам данным в [1]:

$$I_{x1} = I_x + a^2 A; \quad I_{y1} = I_y + b^2 A; \quad I_{x1y1} = I_{xy} + abA \quad (7)$$

где  $a$  и  $b$  – расстояние между осями.

**Задача 4.** Определить моменты инерции прямоугольника относительно осей  $X_1$  и  $Y_1$ , совпадающих с его сторонами (рис. 9).

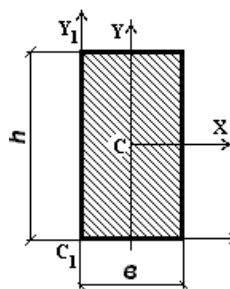


Рис.9

*Решение.* Используем формулы (7), перехода к осям, параллельным центральным:

$$I_{x1} = I_x + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{y1} = I_y + b^2 A = \frac{hb^3}{12} + bh \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{x1y1} = I_{xy} + abA = 0 + bh \frac{h}{2} \frac{b}{2} = \frac{b^2 h^2}{4}$$

Справедливы также зависимости обратные формулам (7):

$$I_x = I_{x1} - a^2 A; \quad I_y = I_{y1} - b^2 A; \quad I_{xy} = I_{x1y1} - abA, \quad (8)$$

т.е. с помощью формул (8) осуществляется переход от некоторых произвольных осей  $X_1$  и  $Y_1$  к центральным осям  $X$  и  $Y$ .

**Задача 5.** Определить момент инерции полукруга относительно центральной оси  $x$  (рис. 7).

*Решение.* Положение центра тяжести фигуры известно (см. задачу 3), тогда:

$$I_x = I_{x1} - a^2 A = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2} \left( \frac{4R}{3\pi} \right)^2 = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4$$

**Задача 6.** Определить моменты инерции сечения (см. рис. 6) относительно центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$ .

*Решение.* Используя зависимости (7) получим:

$$I_x = \frac{8 \cdot 10^3}{12} + (8 \cdot 10) \cdot 1,43^2 - \left[ \frac{4 \cdot 6^3}{12} + (4 \cdot 6) \cdot 2,43^2 \right] = 616,54 \text{ см}^4$$

$$I_y = \frac{8^3 \cdot 10}{12} + (8 \cdot 10) \cdot 0,57^2 - \left[ \frac{4^3 \cdot 6}{12} + (4 \cdot 6) \cdot 0,43^2 \right] = 416,22 \text{ см}^4$$

Рассмотрим особенности использования формул (7) для вычисления моментов инерции при параллельном переносе осей применительно к тонкостенным стержням, поперечное сечение которых состоит из сочетания узких прямоугольников, каждый из которых имеет постоянную толщину.

На рис.10 показан элемент сечения такого тонкостенного стержня в виде прямоугольника шириной  $b$  и толщиной  $\delta$ , ( $\delta \ll b$ ). Вычислим осевые моменты инерции прямоугольника относительно оси  $X$  с использованием формулы (7) Анализ формул (7) показывает [1], что в большинстве случаев собственным моментом инерции узкого прямоугольника,

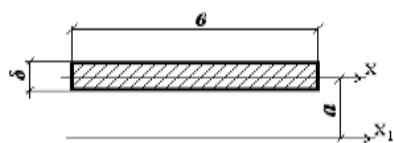


Рис.10.

относительно оси, параллельной, длинной стороне, можно, пренебречь. Для случая, изображенного на рис.10 можно считать, что

$$I_{x1} \cong a^2 A$$

**Задача 7.** Для коробчатого сечения (рис.11), вычислить моменты инерции относительно центральных осей  $X$  и  $Y$ .

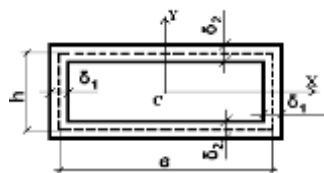


Рис. 11.

Решение.

$$I_x = 2b\delta_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2\frac{\delta_1 h^3}{12} = \frac{bh^2\delta_2}{2} + \frac{h^3\delta_1}{6}$$

$$I_y = 2h\delta_1\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\frac{\delta_2 b^3}{12} = \frac{hb^2\delta_1}{2} + \frac{\delta_2 b^3}{6}$$

При повороте осей  $X$  и  $Y$  на некоторый угол  $\alpha$  моменты инерции  $I_u$ ,  $I_v$ ,  $I_{uv}$  относительно повернутых осей  $u$  и  $v$  (рис. 12) определяются по формулам:

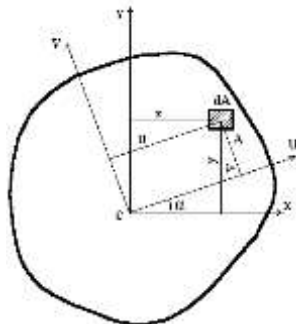


Рис.12.

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (9)$$

где  $\alpha$  - угол поворота осей  $X$  и  $Y$ .

Положительный угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $X$  против хода часовой стрелки. Известно [1], что

$$I_u + I_v = I_x + I_y = \text{const} \quad (10)$$

Это соотношение, показывает, что при повороте осей сумма осевых моментов остается неизменной и равной полярному моменту инерции.

**Задача 8.** Для прямоугольника, (рис.13), вычислить осевые и центробежный моменты инерции, относительно осей  $u$  и  $v$ .

Ось  $u$  совпадает с диагональю прямоугольника, а ось  $v$  перпендикулярна к ней.

Решение. Используя, рис.13 найдем,  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  :

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}}$$

Определим осевые  $I_u$ ,  $I_v$  и центробежный  $I_{uv}$  моменты инерции

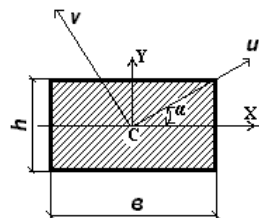


Рис.13

$$\begin{aligned}
 I_u &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha = \\
 &= \frac{bh^3}{12} \left( \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right)^2 + \frac{hb^3}{12} \left( \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right)^2 - 0 = \\
 &= \frac{h^3 b^3}{6(h^2 + b^2)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_v &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha = \frac{bh^3}{12} \left( \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right)^2 + \\
 &+ \frac{hb^3}{12} \left( \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right)^2 + 0 = \frac{hb(h^4 + b^4)}{12(h^2 + b^2)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{uv} &= (I_x - I_y) \sin \alpha \cos \alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = \left( \frac{bh^3}{12} - \frac{hb^3}{12} \right) \times \\
 &\times \left( \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right) \times \left( \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right) + 0 = \frac{h^2 b^2 (h^2 - b^2)}{12(h^2 + b^2)}.
 \end{aligned}$$

#### 4. Главные оси и главные моменты инерции.

Главными осями инерции называют две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Направление главных осей инерции определяется выражением

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2I_{xy} / (I_x - I_y) \quad (11)$$

По этой формуле определяются два значения угла  $\alpha'_0$  и  $\alpha''_0 = \alpha'_0 + 90^\circ$ , отличающиеся друг от друга на  $90^\circ$ , и положение главных осей, которые взаимно перпендикулярны.

Главными моментами инерции называют осевые моменты инерции, вычисленные относительно главных осей инерции, которые имеют экстремальные значения.

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (12)$$

Здесь знак плюс перед вторым слагаемым соответствует максимальному, а знак минус – минимальному моменту инерции.

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называют *главными центральными осями*, а моменты инерции относительно этих осей - *главными центральными моментами инерции*.

Ось симметрии плоского сечения является главной центральной осью инерции.

Положение главных осей инерции находят с помощью выражений:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{I_{xy}}{I_{\max} - I_y}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{I_{xy}}{I_{\min} - I_y}, \quad (13)$$

где  $\alpha_1$  - угол между осью  $x$  и осью, относительно которой момент инерции равен  $I_{\max}$ , а  $\alpha_2$  - угол между осью  $x$  и осью, относительно которой момент инерции равен  $I_{\min}$ .

Положительные значения углов отсчитываются от оси  $x$  против хода часовой стрелки. Напомним, что  $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 90^\circ$

Радиусы инерции, соответствующие главным осям, называются главными радиусами инерции и определяются по формулам:

$$i_{\max} = \sqrt{I_{\max} / A}; \quad i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}. \quad (14)$$

### 5. Примеры вычисления геометрических характеристик составных сечений.

**Задача 9.** Определить положение главных центральных осей и вычислить относительно этих осей моменты инерции (рис. 14).

*Решение.* Заданное поперечное сечение, рассматривается как сочетание двух простейших фигур: прямоугольника  $50 \times 40$  см, из которого вырезан (удален) полукруг  $R = 15$  см.

Выберем положение осей координат, в которых определим положение центра тяжести всей фигуры. Пусть начальные оси координат проходят, через центр тяжести прямоугольника. Вследствие симметрии фигуры относительно вертикальной





$$I_y = I_{y1}^I - I_{y2}^{II} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi R^4}{8} = \frac{50 \times 40^3}{12} - \frac{\pi \times 15^4}{8} = 246796 \text{ см}^4.$$

Сравнивая величины,  $I_x$  и  $I_y$ , устанавливаем, что  $I_{max} = I_1 = I_y = 246796 \text{ см}^4$ ;  $I_{min} = I_2 = I_x = 236319 \text{ см}^4$ .

**Задача 10.** Вычислить величины главных центральных моментов инерции сечения, изображенного на рис. 5.

*Решение.* Из анализа полученного ранее решения устанавливаем (см. задачу 1), что одной из главных осей рассматриваемого сечения, является ось симметрии  $y$ , вторая главная ось  $x_c$  проходит через центр тяжести сечения, и перпендикулярна к первой. Вычислим моменты инерции. Момент инерции относительно оси  $x$  определим, применив формулу перехода к оси, параллельной центральной:

$$I_{xc} = I_{xc}^I + I_{xc}^{II} = I_{x1}^I + a_1^2 A_1 + I_{x2}^{II} + a_2^2 A_2$$

где -  $I_{x1}^I$ ;  $I_{x2}^{II}$  - моменты инерции  $I$  и  $II$  прямоугольников относительно собственных центральных осей  $x_1$  и  $x_2$ ;  $a_1$  и  $a_2$  – расстояние между собственными центральными осями и осью  $x$ .

Ось  $y$  является, одновременно, как главной осью прямоугольников  $I$  и  $II$ , так и всего сечения, тогда:

$$I_y = I_y^I + I_y^{II}$$

Выполнив, вычисления получим:

$$I_{xc} = \frac{14 \cdot 3^3}{12} + (31,5 - 20,25)^2 \cdot 14 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 30^3}{12} + (20,25 - 15)^2 \cdot 3 \cdot 30 = 14560 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{3 \cdot 14^3}{12} + \frac{30 \cdot 3^3}{12} = 686 + 67,5 = 753,5 \text{ см}^4.$$

На основании выполненных вычислений устанавливаем

$$I_1 = I_{xc} = 14560 \text{ см}^4; I_2 = I_y = 753,5 \text{ см}^4.$$

**Задача 11.** На сколько процентов уменьшаются  $I_1$  и  $I_2$  после ослабления квадрата симметричными вырезами, отмеченные пунктиром (см. рис. 16).

Решение. Для квадрата  $I_x = I_y = I_1 = I_2$ . Вычислим осевой момент инерции  $I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^4}{12} = \frac{50^4}{12} \text{ см}^4$

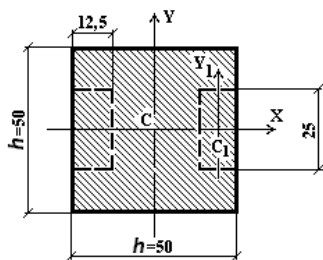


Рис. 16.

Для ослабленного сечения момент инерции относительно оси x будет достигать максимального значения.

$$I_x = I_1 = \frac{50^4}{12} - 2 \cdot \frac{12,5 \cdot 25^3}{12} = 488281,25 \text{ см}^4$$

Тогда, уменьшение  $I_1$  составляет:

$$\delta = \frac{520833,33 - 488281,25}{520833,33} \cdot 100\% = 6,25\%$$

Воспользуемся зависимостью (7), устанавливающую связь между моментами инерции относительно параллельных осей y и  $y_1$ , тогда:

$$I_y = I_2 = \frac{50^4}{12} - 2 \cdot \left[ \frac{25 \cdot 12,5^3}{12} + \left( \frac{37,5}{2} \right)^2 \cdot 25 \cdot 12,5 \right] = 292968,75 \text{ см}^4$$

Уменьшение  $I_2$  составляет:

$$\delta = \frac{520833,33 - 292968,75}{520833,33} \cdot 100\% = 43,75\%$$

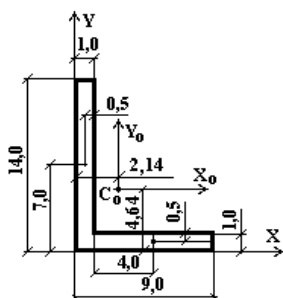


Рис. 17

**Задача 12.** Для сечения, рис.17, определить моменты инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести.

Решение. Проведем произвольные оси x и y и разобьем сечение на части так, чтобы положение центра тяжести каждой из них было известно. Для определения координат центра тяжести всего сечения, вычислим площадь A и статические моменты  $S_x$  и  $S_y$  всего сечения.

$$A = A_1 + A_2 = 14 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 22 \text{ см}^2;$$

$$S_x = S_{x1} + S_{x2} = 14 \cdot 1 \cdot 7 + 8 \cdot 1 \cdot 0,5 = 102 \text{ см}^3$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} = 14 \cdot 1 \cdot 0,5 + 8 \cdot 1 \cdot 5 = 47 \text{ см}^3.$$

Тогда координаты центра тяжести всего сечения можно вычислить следующим образом:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{47}{22} = 2,14 \text{ см}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{102}{22} = 4,64 \text{ см}.$$

Определим центральные осевые и центробежный моменты инерции.

$$I_{x_0} = I_{x1} + A_1 \cdot a_1^2 + I_{x2} + A_2 \cdot a_2^2 = \frac{1 \cdot 14^3}{12} + 1 \cdot 14 \cdot (7 - 4,64)^2 + \frac{8 \cdot 1^3}{12} + 8 \cdot 1 \cdot (4,64 - 0,5)^2 = 444,42 \text{ см}^4$$

$$I_{y_0} = I_{y1} + A_1 \cdot b_1^2 + I_{y2} + A_2 \cdot b_2^2 = \frac{14 \cdot 1^3}{12} + 14 \cdot 1 \cdot (2,14 - 0,5)^2 + \frac{1 \cdot 8^3}{12} + 8 \cdot 1 \cdot (5 - 2,14)^2 = 146,92 \text{ см}^4$$

$$I_{x_0 y_0} = I_{x1 y1} + A_1 a_1 b_1 + I_{x2 y2} + A_2 a_2 b_2 = 0 + 14 \cdot 1 \cdot 2,36 \cdot (-1,64) + 0 + 8 \cdot 1 \cdot 2,86 \cdot (-4,14) = -148,91 \text{ см}^4 = |148,91| \text{ см}^4$$

Полученные значения сравним с данными ГОСТ 8510 - 86 для неравнополочного уголка 140x90x10.

Данный угловой профиль отличается от рассматриваемого сечения закруглениями. Из сортамента устанавливаем, что

$$x_o = 2,12 \text{ см}; \quad y_o = 4,58 \text{ см};$$

$$I_x = 444 \text{ см}^4; \quad I_y = 146 \text{ см}^4; \quad I_{xy} = 147 \text{ см}^4.$$

Результаты, сравнения показывают, что выполненные по ГОСТ закругления прокатных профилей не оказывают существенного влияния на величины моментов инерции и положения центра тяжести.

**Задача 13.** Вычислить главные центральные моменты инерции сечения изображенного на рис. 17.

*Решение.* Определим координаты центра тяжести сечения,

для чего проведем оси  $x_0y_0$  и рассмотрим сечение, состоящее из двух фигур:

Для двутавра – I и швеллера – II, все необходимые данные, имеются в сортаменте.

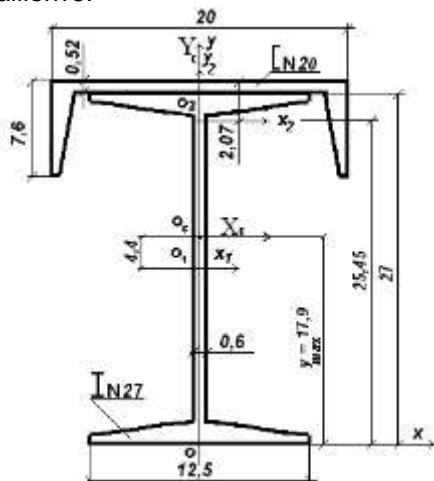


Рис. 17.

Геометрические характеристики для двутавра принимаем по ГОСТ 8239-89: площадь сечения  $A_1 = 40,2 \text{ см}^2$ ; моменты инерции сечения  $I_{x1} = 5010 \text{ см}^4$ ;  $I_{y1} = 260 \text{ см}^4$ .

Для швеллера по ГОСТ 8240-89 - площадь сечения  $A_2 = 23,4 \text{ см}^2$ ; моменты инерции сечения  $I_{x2} = I_{y \text{ ГОСТ}} = 113 \text{ см}^4$ ;  $I_{y2} = I_{x \text{ ГОСТ}} = 1520 \text{ см}^4$ ;  $z_0 = 2,07 \text{ см}$ .

Вследствие симметрии фигуры относительно вертикальной оси, главная центральная ось поперечного сечения  $Y$  совпадает с осью симметрии и, следовательно, абсцисса центра тяжести фигуры  $X_c = 0$ .

Определим ординату центра тяжести сечения. По формуле (6) находим:

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{40,2 \cdot 13,5 + 23,4 \cdot (27 + 0,52 - 2,07)}{40,2 + 23,4} = 17,9 \text{ см}$$

Центр тяжести сечения (точка  $O_c$ ) показан на рис. 17. Проведем через него главные центральные оси инерции  $Y_c O_c X_c$ . Определим главные моменты инерции относительно этих осей.

$$I_{xc} = I_{x1} + A_1 \cdot a_1^2 + I_{x2} + A_2 \cdot a_2^2 = 5010 + 40,2 \cdot (17,9 - 13,5)^2 + 113 + 23,4 \cdot (25,45 - 17,9)^2 = 7235,13 \text{ см}^4$$

$$I_{yc} = I_{y1} + I_{y2} = 260 + 1520 = 1780 \text{ см}^4$$

Ось  $x_c$  является осью максимума, так как  $I_{xc} > I_{yc}$ , а ось  $y_c$  – осью минимума, следовательно:

$$I_1 = I_{xc} = 7235,13 \text{ см}^4; I_2 = I_{yc} = 1780 \text{ см}^4.$$

**Задача 14.** Определить положение главных центральных осей и вычислить моменты инерции относительно этих осей для составного коробчатого сечения (рис. 18), имеющего вертикальную ось симметрии – ось  $Y$ .

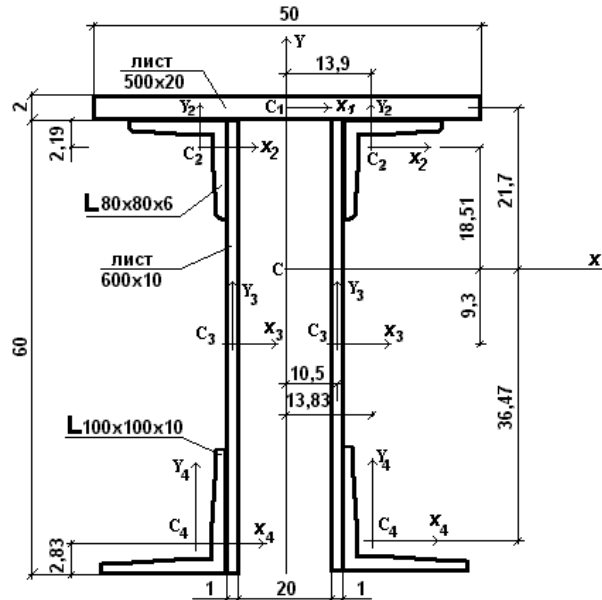


Рис. 18.

*Решение.* Заданное сечение состоит из четырех частей: первая – металлический лист  $500 \times 20$ , вторая – два уголка  $L 80 \times 80 \times 6$ , третья – два листа  $600 \times 10$  и четвертая – два уголка  $L 100 \times 100 \times 10$ . Геометрические характеристики уголков берем из ГОСТ 8509-93,

а листов подсчитаем, что их сечение представляет собой прямоугольник.

Определение положения центра тяжести сечения.

Начало отсчета для вспомогательных осей совместим с центром тяжести прямоугольника  $500 \times 20$ . Определим координаты центров тяжести элементов поперечного сечения, в системе координат  $X_1 C_1 Y_1$ :

$$\text{I элемент (лист } 500 \times 20) - y_{c1}^I = 0$$

$$\text{II элемент (2L } 80 \times 80 \times 6) - y_{c1}^{II} = -3,19 \text{ см,}$$

$$\text{III элемент (2 листа } 600 \times 10) - y_{c1}^{III} = -31 \text{ см,}$$

$$\text{IV элемент (2L } 100 \times 100 \times 10) - y_{c1}^{IV} = -58,17 \text{ см.}$$

Геометрические характеристики элементов, составляющих сечение следующие:

1. Для листа  $500 \times 20$ :

$$A^I = 50 \cdot 2 = 100 \text{ см}^2; \quad I_x^I = \frac{bh^3}{12} = \frac{50 \cdot 2^3}{12} = 33,3 \text{ см}^4;$$

$$I_y^I = \frac{b^3 h}{12} = \frac{50^3 \cdot 2}{12} = 20833 \text{ см}^4.$$

2. Для уголка  $80 \times 80 \times 6$ :

$$A^{II} = 9,38 \text{ см}^2; \quad z_{02} = 2,19 \text{ см}; \quad I_x^{II} = I_y^{II} = 57 \text{ см}^4.$$

3. Для листа  $600 \times 10$ :

$$A^{III} = 60 \cdot 1 = 60 \text{ см}^2; \quad I_x^{III} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \cdot 60^3}{12} = 18000 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{III} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{1^3 \cdot 60}{12} = 5 \text{ см}^4;$$

4. Для уголка  $100 \times 100 \times 10$ :

$$A^{IV} = 19,2 \text{ см}^2; \quad z_{04} = 2,83 \text{ см}; \quad I_x^{IV} = I_y^{IV} = 179 \text{ см}^4.$$

Тогда по формуле (6) ордината  $y_c$  центра тяжести всего сечения равна:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^4 S_{x1}}{\sum_{i=1}^4 A} = \frac{A^I y_{c1}^I + A^{II} y_{c1}^{II} + A^{III} y_{c1}^{III} + A^{IV} y_{c1}^{IV}}{A^I + A^{II} + A^{III} + A^{IV}} =$$

$$= \frac{-(0 + 2 \times 9,38 \times 3,19 + 2 \times 60 \times 31 + 2 \times 19,2 \times 58,17)}{100 + 2 \times 9,38 + 2 \times 60 + 2 \times 19,2} = -21,7 \text{ см.}$$

Отложив полученное значение от оси  $X_1$ , находим положение центра тяжести всего сечения и проводим центральную ось  $X$ .

Определение моментов инерции относительно центральных осей  $X$  и  $Y$ . Осевые  $I_x$  и  $I_y$  моменты инерции сечения относительно центральных осей  $X$  и  $Y$ , вычислим с использованием уравнений (7). Установим предварительно  $a_i$  и  $b_i$  для элементов сечения:

I элемент (лист 500x20)  $a_1 = -21,7 \text{ см}; b_1 = 0,$   
 II элемент (2L 80x80x6)  $a_2 = -18,51 \text{ см}; b_2 = 13,19 \text{ см},$   
 III элемент (2 листа 600x10)  $a_3 = 9,3 \text{ см}; b_3 = 10,5 \text{ см},$   
 IV элемент (2L 100x100x10)  $a_4 = 36,47 \text{ см}; b_4 = 13,83 \text{ см}.$

Тогда осевые моменты инерции будут равны:

$$I_x = I_{x1}^I + a_1^2 A^I + 2(I_{x2}^{II} + a_2^2 A^{II}) + 2(I_{x3}^{III} + a_3^2 A^{III}) + 2(I_{x4}^{IV} + a_4^2 A^{IV}) =$$

$$= 33,3 + 21,7^2 \times 100 + 2(57 + 18,51^2 \times 9,38) +$$

$$+ 2(18000 + 9,4^2 \times 60) + 2(179 + 36,47^2 \times 19,2) = 151475 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y1}^I + 2(I_{y2}^{II} + b_2^2 A^{II}) + 2(I_{y3}^{III} + b_3^2 A^{III}) + 2(I_{y4}^{IV} + b_4^2 A^{IV}) =$$

$$= 20833 + 2(57 + 13,19^2 \times 9,4) + (5 + 10,5^2 \times 60) + 2(179 +$$

$$+ 13,83^2 \times 19,2) \cong 45160 \text{ см}^4$$

$$I_1 = I_x = 151475 \text{ см}^4, \quad I_2 = I_y = 45160 \text{ см}^4.$$

Определение главных радиусов инерции. Максимальный  $i_1$  и минимальный  $i_2$  радиусы инерции определим на основании выражения (14).

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{151475}{277,16}} = 23,38 \text{ см} ; i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{45160}{277,16}} = 12,8 \text{ см.}$$

**Задача 15.** Определить положение главных центральных осей и вычислить моменты инерции относительно этих осей для сечения, составленного из швеллера № 22 и уголка 110x110x8, рис.19 .

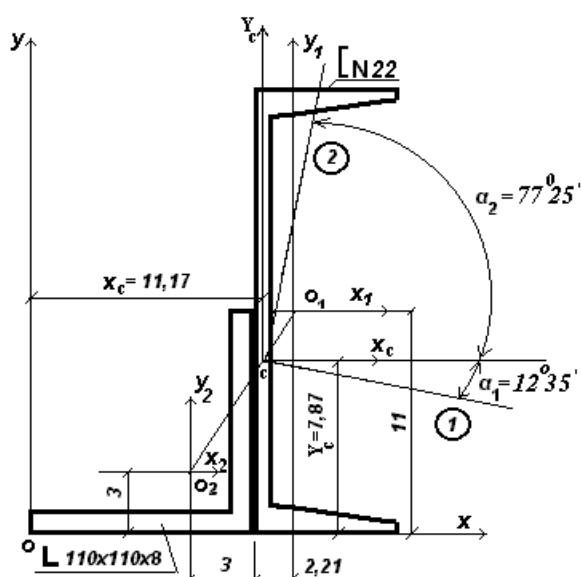


Рис. 19.

*Решение.* Сечение разбиваем на две части: швеллер № 22 и уголок 110x110x8.

Геометрические характеристики швеллера № 22 принимаем по ГОСТ 8240-89:  $A_1 = 26,7 \text{ см}^2$ ,  $I_{x1} = 2110 \text{ см}^4$ ,  $I_{y1} = 151 \text{ см}^4$ ,  $z_o = 2,21 \text{ см}$ .

Характеристики уголка 110x110x8 принимаем по ГОСТ 8509 - 93:

$$A_1 = 17,2 \text{ см}^2, I_{x2} = 198 \text{ см}^4, I_{max} = 315 \text{ см}^4, I_{min} = 81,8 \text{ см}^4, |I_{xy}| = 116 \text{ см}^4, z_o = 3 \text{ см}.$$

Выбираем в качестве вспомогательных осей оси УОХ и определим координаты центра тяжести сечения в этих осях:



$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{26,7 \cdot (11 + 2,21) + 17,2(11 - 3)}{26,7 + 17,2} = \frac{490,307}{43,9} = 11,17 \text{ см}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{26,7 \cdot 11 + 17,2 \cdot 3}{26,7 + 17,2} = 7,87 \text{ см}$$

Отложив эти значения от осей УОХ, находим положение центра тяжести сечения **С** и проведем центральные оси сечения  $x_c$ ,  $y_c$ . Аналитическое определение положения центра тяжести всей фигуры можно проверить графически. Для этого, необходимо в масштабе показать все сечение и центры тяжести швеллера  $O_1$  и уголка  $O_2$  и всего сечения **С**. Эти три точки  $O_1$ ,  $O_2$  и **С** – должны находиться на одной прямой, см. рис.19.

Вычислим моменты инерции всей фигуры относительно найденных центральных осей, по формулам (7):

$$I_{xc} = 2110 + 26,7 \cdot (11 - 7,87)^2 + 198 +$$

$$+ 17,2 \cdot (7,87 - 3)^2 = 2977,51 \text{ см}^4;$$

$$I_{yc} = 151 + 26,7 \cdot (13,21 - 11,17)^2 + 198 +$$

$$+ 17,2 \cdot (11,17 - (11 - 3))^2 = 632,96 \text{ см}^4;$$

$$I_{xcyc} = 0 + 26,7 \cdot (-(11 - 7,87)) \cdot (-(13,21 - 11,17)) +$$

$$+ 116 + 17,2 \cdot (11,17 - (11 - 3)) \cdot$$

$$\cdot (7,87 - 3) = 552,02 \text{ см}^4$$

Главные моменты инерции всего сечения определим по формуле:

$$I_{\frac{max}{min}} = \frac{I_{xc} + I_{yc}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xc} - I_{yc}}{2}\right)^2 + I_{xcyc}^2} =$$

$$= \frac{2977,51 + 632,96}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2977,51 - 632,96}{2}\right)^2 + 552,02^2} =$$

$$= 1805,235 \pm 1295,75$$

или окончательно получим:

$$I_{max} = I_1 = 3100,985 \text{ см}^4; \quad I_{min} = I_2 = 509,485 \text{ см}^4.$$

Полученные результаты можно проверить, исходя из различных соображений.

Удостоверимся в том, что наибольший момент инерции, действительно является наибольшим, а наименьший минимальным и положительным :

$$I_{max} > I_x > I_y > I_{min} > 0$$

$$3100,985 > 2977,51 > 632,96 > 509,485$$

Далее проверим инвариантность. Получаем тождество:

$$3100,985 + 509,485 = 2977,51 + 632,96$$

$$3610,47 = 3610,47$$

Определим положение главных центральных осей :

$$tg \alpha_1 = -\frac{552,02}{3100,985 - 632,96} = -0,223; \alpha_1 = -12^{\circ}35'$$

$$tg \alpha_2 = -\frac{552,02}{509,485 - 632,96} = 4,47; \alpha_2 = 77^{\circ}25'$$

Эти углы являются углами наклона главных центральных осей, отложенных от оси x.

Проверка дает  $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 90^{\circ}$ .

Напомним, что положительные углы откладываются от оси x против хода часовой стрелки, а отрицательные углы – по ходу часовой стрелки. Положение главных центральных осей (ось максимум обозначена цифрой 1, а ось минимум – цифрой 2) показано на рис. 19.

Окончательной проверкой правильности проведенных вычислений является равенство нулю центробежного момента инерции сечения  $I_{1,2}$  относительно главных центральных осей.

Используя выражение (9), определим:

$$I_{1,2} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = \frac{2977,51 - 632,96}{2}$$

$$\sin 2(12^{\circ}35') - 552,02 \cos 2(12^{\circ}35') = 0$$

Проверка выполняется.

**Задача 16.** Для сечения (рис.20) найти положение главных центральных осей и вычислить моменты инерции относительно этих осей.

*Решение.* Разобьем сечение на два прямоугольника и полукруг. Предварительно вычислим геометрические характеристики каждой части составного сечения.

1. Для горизонтального прямоугольника:

$$A^I = 20 \times 6 = 120 \text{ см}^2, I_{x1}^I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 6^3}{12} = 360 \text{ см}^4,$$

$$I_{y1}^I = \frac{hb^3}{12} = \frac{6 \times 20^3}{12} = 4000 \text{ см}^4.$$

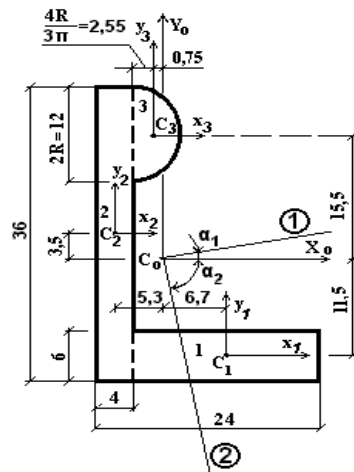


Рис 20.

2. Для вертикального прямоугольника:

$$A^{II} = 4 \times 36 = 144 \text{ см}^2, I_{x2}^{II} = \frac{4 \times 36^3}{12} = 15552 \text{ см}^4,$$

$$I_{y2}^{II} = \frac{36 \times 4^3}{12} = 192 \text{ см}^4.$$

3. Для полукруга:

$$A^{III} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \times 6^2}{2} = 56,55 \text{ см}^2, I_{x3}^{III} = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi \times 6^4}{8} = 509 \text{ см}^4,$$

$$I_{y3}^{III} = \frac{(9\pi^2 - 64)}{72\pi} R^4 = 0,109 \times 6^4 = 142,25 \text{ см}^4.$$

Определим положения центра тяжести сечения. Координаты центра тяжести сечения будем определять в осях координат  $X_1C_1Y_1$ , проходящих через центр тяжести первого прямоугольника.

В этой системе координат, центры тяжести прямоугольников и полукруга будут равны:

$$\text{I} \quad x_{c1}^I = 0; \quad y_{c1}^I = 0,$$

$$\text{II} \quad x_{c1}^{II} = -12 \text{ см}; \quad y_{c1}^{II} = 15 \text{ см},$$

$$\text{III} \quad x_{c1}^{III} = -7,45 \text{ см}; \quad y_{c1}^{III} = 27 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести всего сечения определим, используя зависимость (6):

$$y_c = \frac{A^I y_{c1}^I + A^{II} y_{c1}^{II} + A^{III} y_{c1}^{III}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{0 + 144 \times 15 + 56,55 \times 27}{320,55} = 11,5 \text{ см}$$

$$x_c = \frac{A^I x_{c1}^I + A^{II} x_{c1}^{II} + A^{III} x_{c1}^{III}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{0 + 144(-12) + 56,55(-7,45)}{320,55} = -6,7 \text{ см}$$

Определим осевые моменты инерции  $I_x$ ,  $I_y$  сечения и центробежный  $I_{xy}$  момент инерции, относительно центральных осей, используя выражение (8). Предварительно установим величины  $a_i$  и  $b_i$  для каждого элемента сечения.

$$\text{I} \quad a_1 = -y_c = -11,5 \text{ см} \quad b_1 = x_c = 6,7 \text{ см}$$

$$\text{II} \quad a_2 = (y_{c1}^{II} - y_c) = 3,5 \text{ см} \quad b_2 = (x_{c1}^{II} - x_c) = -5,3 \text{ см}$$

$$\text{III} \quad a_3 = (y_{c1}^{III} - y_c) = 15,5 \text{ см} \quad b_3 = (x_{c1}^{III} - x_c) = -0,75 \text{ см}.$$

Тогда осевые моменты инерции будут равны:

$$\begin{aligned} I_x &= I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} = [I_{x1}^I + a_1^2 A^I] + [I_{x2}^{II} + a_2^2 A^{II}] + [I_{x3}^{III} + a_3^2 A^{III}] = \\ &= [360 + 11,5^2 \cdot 120] + [15552 + 3,5^2 \cdot 144] + [509 + 15,5^2 \cdot 56,55] = \\ &= 47641 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$I_y = I_y^I + I_y^{II} + I_y^{III} = [I_{y1}^I + b_1^2 A^I] + [I_{y2}^{II} + b_2^2 A^{II}] + [I_{y3}^{III} + b_3^2 A^{III}] =$$

$$= [4000 + 6,7^2 120] + [192 + 5,3^2 144] + [142,25 + 0,75^2 56,55] =$$

$$= 13798 \text{ см}^4,$$

Центробежный момент инерции:

$$I_{xy} = I_{xy}^I + I_{xy}^{II} + I_{xy}^{III} = [I_{x1y1}^I + a_1 b_1 A^I] + [I_{x2y2}^{II} + a_2 b_2 A^{II}] + [I_{x3y3}^{III} +$$

$$+ a_3 b_3 A^{III}] =$$

$$= [0 + (-11,5)(6,7) 120] + [0 + 3,5(-5,3) 144] +$$

$$+ [0 + 15,5(-0,75) 56,55] = -12575 \text{ см}^4.$$

#### Определение главных центральных моментов инерции.

Экстремальные значения осевых моментов инерции найдем с помощью формулы (12):

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \frac{47641 + 13798}{2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(47641 - 13798)^2 + 4 \times 12575^2} = 30719,5 \pm 21082,4;$$

$$I_1 = 51802 \text{ см}^4 \qquad I_2 = 9637 \text{ см}^4$$

Проверим вычисления, используя для этого формулу (10):

$$I_x + I_y = 47641 + 13798 = 61439 \text{ см}^4$$

$$I_1 + I_2 = 51802 + 9637 = 61439 \text{ см}^4$$

Проверка выполняется.

Определение положения главных центральных осей инерции. Воспользуемся формулами (13):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{I_{xy}}{I_1 - I_y} = -\frac{-12575}{51802 - 13798} = 0,331; \quad \alpha_1 = 18^{\circ} 18'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{I_{xy}}{I_2 - I_y} = -\frac{-12575}{9637 - 13798} = -3,022, \quad \alpha_2 = -71^{\circ} 42'.$$

Выполним, как и в предыдущей задаче, окончательную проверку правильности проведенных вычислений. Определим:

$$I_{1,2} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha =$$

$$= \frac{47641 - 13798}{2} \sin 2(18^\circ 18') - 12575 \cos 2(18^\circ 18') \approx 0$$

Проверка выполняется.

Следовательно, вычисления выполнены, верно.

### 6. Контрольные вопросы.

1. Что называется статическим моментом сечения относительно оси?
2. Какова размерность статического момента?
3. Для чего нужен статический момент?
4. Чему равен статический момент сечения относительно центральной оси?
5. Какие оси называются центральными?
6. Напишите формулу для определения положения центра тяжести.
7. Для каких сечений при определении положения центра тяжести достаточно найти только одну координату?
8. Из каких соображений устанавливают знак статического момента?
9. Как вычислить статический момент сложного сечения? Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции сечения?
10. Какова размерность моментов инерции?
11. Какие моменты инерции всегда положительны?
12. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну и ту же точку?
13. Как изменится центробежный момент инерции сечения при повороте осей координат на  $90^\circ$ ?
14. Какие оси называются главными и главными центральными?
15. Что такое главные и главные центральные моменты инерции?
16. Для каких сечений можно без вычисления установить положение главных осей?
17. Укажите положение главных центральных осей для прямоугольника, треугольника, круга, кольца и напишите величины осевых моментов инерции относительно этих осей.

18. Напишите формулу для определения положения главных осей инерции и величин главных моментов инерции.
19. Какие проверки рекомендуется выполнить при определении положения главных осей инерции и величин главных моментов инерции?
20. Напишите формулу для осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей.
21. Напишите формулы для осевых и центробежного моментов инерции при повороте осей.
22. В плоскости сечения проведен ряд параллельных осей; относительно какой из них осевой момент инерции имеет наименьшее значение?
23. Какой из двух моментов инерции треугольника больше: относительно оси, проходящей через основание или относительно оси, проходящей через вершину треугольника параллельно основанию?
24. Какой из двух моментов инерции квадратного сечения больше: относительно центральной оси, параллельной основанию, или относительно оси, совпадающей с диагональю сечения?

## 7. Литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов.– 8-е изд. ис.- М.: Студент, 2012.–560 с.: ил.
2. Лукьянов А.М., Лукьянов М.А. Техническая механика: учебник. М. ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2014. – 711 с.
3. Г.М. Ицкович. Сопротивление материалов. - 9-е изд. стер.- М.: Высш. шк., 2001. – 368 с.: ил.
4. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учебное пособие для вузов / Под. ред. Л.С. Минина.– 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1999. – 592 с.: ил.
5. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: Высш. шк., 2003.- 351с.: ил.
6. Феодосьев В.И.. Сопротивление материалов. - 9-е изд., стереотип.- М.: Наука. Главная редакция физ. - мат. литературы, 1986.- 560 с.: ил.

7. Иосилевич Г.Б., Лебедев П.А., Стреляев В.С.. Прикладная механика. - М.: Машиностроение,1995.- 576 с.: ил.
8. ГОСТ 8239 – 89. Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент. - М.: Изд-во стандартов,1990. – 6 с.
9. ГОСТ 8240 – 89. Швеллеры стальные горячекатаные. Сортамент. - М.: Изд-во стандартов,1990. – 7 с.
10. ГОСТ 8510 – 86. Уголки стальные горячекатаные не равнополочные. Сортамент.- М. Изд-во стандартов,1990. – 6 с.
11. ГОСТ 8509 – 93. Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент.- М. Изд-во стандартов,1994. – 12 с.

### Оглавление

Введение.....	3
1. Основные понятия.....	3
2. Центр тяжести сечения.....	5
Задача 1.....	6
Задача 2.....	7
Задача 3.....	8
3.Вычисление моментов инерции при параллельном переносе и повороте осей.....	10
Задача 4.....	10
Задача 5.....	11
Задача 6.....	11
Задача 7.....	12
Задача 8.....	12
4.Главные оси и главные моменты инерции.....	13
5. Примеры вычисления геометрических характеристик составных сечений.....	14
Задача 9.....	14
Задача 10.....	16
Задача 11.....	16
Задача 12.....	17
Задача 13.....	18
Задача 14.....	20
Задача 15.....	23
Задача 16.....	26
6. Контрольные вопросы.....	29
7.Литература.....	30



Св. план 2018 г., поз.303

Лукьянов Анатолий Михайлович, Лукьянов Михаил Анатольевич,  
Монахов Игорь Иванович

**Геометрические характеристики плоских сечений**

*Учебное пособие  
по дисциплине «Сопротивление материалов»*

---

Тираж 100 экз.

---

Москва, Копировальный центр PrintSide