1317

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Информационные системы в экономике»

Е.А. СЕСЛАВИНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Методические указания
к практическим занятиям
по дисциплине
«Математическое моделирование
экономических процессов»*

МОСКВА – 2000

1317

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Информационные системы в экономике»

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

Е.А. СЕСЛАВИНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания
к практическим занятиям
по дисциплине
«Математическое моделирование
экономических процессов»

МОСКВА – 2000

УДК – 519.2./33
С.33

Сеславина Е.А. Математическое моделирование экономических процессов: Методические указания. – М.: МИИТ, 1999. – 20 с.

Содержатся задачи и примеры экономико-математических моделей, применяемых в финансовых расчетах и системах обработки данных, на основе применения теории рекуррентных уравнений.

1. ВВЕДЕНИЕ

А. Пояснение к теме

Решения, принимаемые в сфере экономики, невозможны без предварительных расчетов. Если же эти расчеты сказываются ошибочными, то случаются сбои в производстве, как в отдельных отраслях, так и в экономике в целом. Например, может не хватить ресурсов (сырьевых, финансовых, людских), что приведет к долгострою, срыву обязательств, увеличению себестоимости продукции и другим неблагоприятным последствиям. В условиях современной сложной и взаимосвязанной экономики расчеты осуществляются путем применения мощного математического аппарата и средств вычислительной техники. Как правило, при этом составляется экономико-математическая модель конкретного процесса, которая анализируется методами вычислительной техники.

2. ПРИМЕНЕНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТОВ МНОГОЭТАПНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

А. Теория рекуррентных уравнений

Рекуррентным уравнением с одним неизвестным называется следующее соотношение:

$$x_{n+1} = f(n, x_1, \dots, x_n), \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ – неизвестная последовательность, а f – заданная функция. Теория линейных рекуррентных уравнений и их систем изложена в [1].

Пример 1. На депозитный счет банка изначально положена сумма A = 10000 рублей. Годовой банковский процент составляет p = 10%. Требуется определить средства на счете после 3-х лет.

Решение. В начале каждого n+1-го года на счете помимо суммы, имевшейся в предыдущем году A_n, будет и добавка A_n * a, где a = p/100. Получим рекуррентное уравнение

$$A_{n+1} = (1 + a)A_n. \tag{2}$$

Поэтому, $A_1 = (1+a)A$, $A_2 = (1+a)A_1 = (1+a)^2A$, $A_3 = (1+a)^3A$ и вообще

$$A = (1+a)^nA \qquad (3)$$

(3) – формула «сложных» процентов. В частности, $A_3 = (1+10/100)^3*$ $*10000 = 1{,}1^3*10000 = 13310$ руб. Заметим, что A_n в (3) является решением уравнения (2) при любом A. Само A называется начальным условием на переменное x_n.

Если задано начальное значение неизвестного x_1, то всякое уравнение типа (1) может быть решено последовательными вычислениями x_1, также как и было решено уравнение (2). Действительно:

$$x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2), \ldots,\ x_n = f(x_{n+1}). \qquad (4)$$

В финансовых расчетах при оценке стоимости одной денежной единицы в соответствии с формулой (3) используется мультиплицирующий множитель FM1(p%,n), который сведен в специальную таблицу [2]. Экономический смысл множителя FM1(p%,n) показывает величину стоимости одной денежной единицы через n периодов при заданной процентной ставке FM1(p%,n) = $(1+a)^n$, a = p/100.

В задачах определения приведенной стоимости одной денежной единицы используют дисконтирующий множитель FM2(p%,n), обратный FM1(p%,n). Экономический смысл этого множителя заключается в том, что он показывает стоимость на настоящий момент денежной единицы будущего. То есть, показывает чему с позиции текущего момента равна одна денежная единица, обращающаяся в сфере бизнеса n периодов спустя от момента расчета при заданных процентной ставке и частоте начисления процентов. Таблицы этого множителя даны в [2].

$$FM2(p\%,n) = 1/FM1(p\%,n).$$

ЗАДАЧИ

1) Через сколько лет банковский счет превзойдет в 2 раза (3, 4, n) исходно положенный на него капитал при ежегодном проценте p = 10%?
2) Вычислить начальный объем вклада в банк с процентом p = 10%, который через 3 года (4, 5, n лет) стал равен 100000 руб

3) Вычислить FM1(20,5), FM1(10,5), FM1(20,3), FM1(10,3).
4) Вычислить FM2(20,5), FM2(10,5), FM2(20,3), FM2(10,3).
5) Пусть в каждом i-том году банковский процент равен a. Доказать, что через n лет исходная сумма вклада будет увеличена более, чем в (1+na/100) раз. (Использовать неравенство Бернулли: $(1+x)^n > 1+nx$, при $x > -1, n > 1$).

Б. Линейные рекуррентные уравнения

Представляет практический интерес нахождение аналитического решения для частных случаев уравнения типа (1). Чаще всего встречаются линейные уравнения, когда f линейна относительно x_i. Рассмотрим прежде всего уравнения первого порядка, когда функция f из (1) зависит только от n и x_n и не зависит от $x_1,\dots,x_{n+1}$. В этом случае получим уравнение

$$x_{n+1} = b_n * x_n + c_n. \tag{5}$$

Сначала изучим частные случаи (5).

а. Нестационарное однородное линейное рекуррентное уравнение первого порядка:

$$x_{n+1} = b_н * x_n. \tag{6}$$

Действуя по описанной выше схеме, получим: $x_2 = b_1x_1, x_3 = b_2x_2 = b_1b_2x_1$, и вообще

$$x_n = \left(\prod_1^{n-1} b_i\right) * x_1, n > 1. \tag{7}$$

Пример 2. В первом году банковский процент составлял 20%, во втором он изменился до 15%, а на третий год – до 10%. В начале на депозит была положена сумма в 10000 руб. Требуется определить средства на счете после 3-х лет.

Решение. По условию b_1 = 1+20/100 = 1,2; b_2 = 1+15/100 = 1,15; b_3 = 1+10/100 = 1,1. По формуле (7) получим: $x_4 = b_1* b_2* b_3* x_1$ = 1,2*1,15*1,1*10000 = 15180 руб.

Пример 3. В условиях инфляции, равной 60% в годовом исчислении, банковский процент равен 40% за каждый полгода. Эффективно ли вложение средств в банк?

Решение. Если вложено A денежных единиц в банк, сроком на один год (два срока в полгода), то по формуле (7) будет получено A = $(1+40/100)^2A = 1{,}96A$. Однако, из-за инфляции эта сумма обесценится на 60: и станет равной $\overline{A} = (1-60/100)A_2 = 0{,}4A_2 = 0{,}784A$ в твердой валюте. Вложение в банк убыточно в размере 21,6% годовых.

ЗАДАЧИ

1) В банк была положена сумма в 1000 руб. В течение 4-х лет ежегодный банковский процент составлял 12%, а затем в течение 4-х лет он равнялся 8%. Найти сумму на счете через 3 года, 5 лет (8 лет).
2) В банк была положена сумма в 1000 руб. В течение 4-х лет ежегодный банковский процент составлял 12%, а затем в течение 4-х лет он был изменен на другой. Найти этот процент, если через 6 лет сумма вклада составила 250 руб.
3) Пусть в каждом i-том году банковский процент равен p_i. Доказать, что через n лет исходная сумма вклада будет увеличена более, чем в $\left(1+\sum\limits_{1}^{n} p_i / 100\right)$ раз.
4) Решить следующие рекуррентные уравнения:
   1. $x_{n+1} = x_n$, $x_1 = 2$; **2.** $x_{n+1} = -x_n$, $x_1 = 2$; **3.** $x_{n+1} = x_n$, $x_2 = 2$;
   4. $x_{n+1} = -x_n$, $x_2 = 2$; **5.** $x_{n+1} = 2x_n$, $x_1 = 1$; **6.** $x_{n+1} = -2x_n$, $x_1 = 1$;
   7. $x_{n+1} = 2x_n$, $x_2 = 2$; **8.** $x_{n+1} = -2x_n$, $x_2 = 2$.
5) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = a x_n$, $x_1 \neq 0$ и $0 < a < 1$.
6) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = a x_n$, $x_1 \neq 0$ и $a > 1$.
7) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = a x_n$, $x_1 \neq 0$ и $-1 < a < 1$.
8) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = a x_n$, $x_1 \neq 0$ и $a > -1$.

9) Что выгоднее, вложить деньги в банк на 3 года с годовой процентной ставкой а = 10%, или инвестировать их в проект на тот же срок с выплатой вознаграждения в размере 30% за все время?
10) Какая сумма предпочтительнее при ставке 8%: 10000 рублей сегодня, либо 20000 рублей через 8 лет?
11) Что более предпочтительно – получить 10000 рублей сегодня, либо 50000 рублей через 8 лет, если коэффициент дисконтирования равен 9%?
12) Вычислить ежеквартальную процентную ставку, если она приводит к увеличению суммы вклада на 20% за год.

b. Линейное рекуррентное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$x_{n+1} = b\,x_n + c. \tag{8}$$

Чтобы найти общее решение (8) сделаем следующую замену переменного: $y_n = x_n + R_n$. Подставив последнее выражение в (8), получим:

$$y_{n+1} + R = b(y_n + R) + c \Rightarrow y_{n+1} = by_n + R(1-b) + c.$$

Выберем R таким образом, чтобы получилось однородное рекуррентное уравнение относительно y_n. Получим:

$$R = c/(b-1), y_n = y_1 b^{n-1} = (x_1 + R)b^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n = x_1 * b^{n-1} + \frac{b^{n-1}-1}{b-1} * c \tag{9}$$

Пример 4. На депозитный счет банка изначально положена сумма А = 10000 руб. В начале каждого следующего года на счет вкладчик добавлял еще по 2000 рублей. Годовой банковский процент составляет р = 10%. Требуется определить средства на счете после 3-х лет.

Решение. c = 2000, b = 1,1, x_0 = 10000. По формуле (9) получим:

$$x = 1{,}1^3 * 10000 + \frac{1{,}1^3 - 1}{1{,}1 - 1} * 2000 = 19930 \text{ руб.}$$

c. Стационарное неоднородное линейное рекуррентное уравнение первого порядка:

$$x_{n+1} = b\,x_n + c_n\,. \qquad (10)$$

Чтобы найти общее решение (10) сделаем следующую замену переменного: $y_n = x_n * b^n$. Подставив в (10), получим:

$$y_{n+1} * b^{n+1} = b^{n+1} * y_n + c_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n + b^{n+1} * c_n\,.$$

Это означает, что $y_2 - y_1 = c_1 * b^{-2}$; $y_3 - y_2 = c_2 * b^{-3}, \ldots,$ $y_n - y_{n+1} = c_{n+1} * b^n$. Сложив все эти уравнения, получим: $y_n = y_1 + \sum\limits_{i=1}^{n} c_{i-1} * b^{-i-1}$. Следовательно,

$$x_n = x_1 * b^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i * b^{n-1}, n > 1\,. \qquad (11)$$

Пример 5. На депозитный счет банка изначально положена сумма А = 10000 рублей. В начале второго года было добавлено вкладчиком еще 1000 руб., в начале третьего года на счет он положил 2000 руб., а в начале четвертого – 3000 руб. Чему стала равняться сумма на депозите после этого, если годовой банковский процент составлял 10%?

Решение. $c_0 = 1000$. $c_1 = 2000$, $c_2 = 3000$, $b = 1{,}1$, $x_0 = 10000$. По формуле (9) получим: $x_3 = 1{,}1^3*10000+1000*1{,}1^2+2000*1{,}1+3000 =$ 19731 руб.

При оценке денежных потоков учитывают условия пренумерандо и постинумерандо. В первом случае денежное поступление начинается немедленно, а во втором – с временной отсрочной на один цикл начисления процентов. При наличии неравномерного потока C_1, $C_2, \ldots, C_n$ пренумерандо в финансовых расчетах для определения будущей стоимости исходного потока S в соответствии с (11) используется следующая формула:

$$S = \sum_{i=1}^{n} C_i FM1(p\%, n - i + 1)\,.$$

Для решения обратной задачи – нахождения приведенной стоимости потока Q пренумерандо используют другую формулу:

$$Q = (1 + a)\sum_{i=1}^{n} C_i FM2(p\%. n - i - 1)$$

При оценке равномерных денежных потоков (аннуитетов) с аналогичными условиями их поступления используют для определения будущей стоимости срочного аннуитета постнумерандо в одну денежную единицу – мультиплицирующий множитель

$$FM3(p\%,n) = \frac{(1+a)^n - 1}{a}, a = p/100.$$

Экономический смысл этого множителя заключается в следующем: он показывает, чему будет равна суммарная величина срочного аннуитета в одну денежную единицу к концу срока его действия. Эта величина приводится в таблицах [2]. Приведем соответствующий вывод. Пусть поступает денежный поток постнумерандо величиной A при начислении процентов a. Пусть после k начислений образуется сумма x_k. Получим следующее рекуррентное уравнение: $x_{k+1} = (1+a)x_k + A$ с начальным условием x_1 = A. По формуле (9) получим:

$$x_n = (1+a)^{n-1}x_1 + A * \frac{(1+a)^{n-1} - 1}{1+a-1} = A * \frac{(1+a)^{n-1} - 1}{a} + A(1+a)^{n-1} =$$

$$= A * \frac{(1+a)^n - 1}{a} = A * FM3(p\%,n).$$

Для определения текущей стоимости срочного аннуитета поснумерандо в одну денежную единицу используют дисконтирующий множитель:

$$FM4(p\%,n) = \frac{1-(1+a)^{-n}}{a}, a = p/100.$$

Экономический смысл этого множителя состоит в следующем: он показывает, чему равна с позиции текущего момента величина аннуитета с регулярными денежными поступлениями в размере одной денежной единицы, продолжающегося n равных периодов с заданной процентной ставкой. Значения этого множителя также табулированы в [2]. Приведем вывод последней формулы. Пусть требуется погасить равными платежами ссуду S за n раз с начислением процентов a на непогашенную часть кредита. Пусть A – величина платежа, y_k – остаток после k-го платежа. Тогда $a y_k$ – проценты за период. Получим следующее рекуррентное уравнение: $y_{k+1} = y_k - A + a y_k = (1+a)y_k - A$ с начальным условием $y_1 = S(1+a) - A$, потому что поток постнумерандо. По формуле (9) получим:

$$y_n = y_1(1+a)^{n-1} - A * \frac{(1+a)^{n-1} - 1}{1+a-1} = 0,$$

потому что остаток после n-го платежа равен нулю. Подставив в последнее равенство начальное условие и выразив S, получим:

$$S = A * \frac{1-(1+a)^{-n}}{a} = A * FM4(p\%, n).$$

ЗАДАЧИ

1) Вычислить FM3(20,5), FM3(10,5), FM3(20,3), FM3(10,3).
2) Вычислить FM4(20,5), FM4(10,5), FM4(20,3), FM4(10,3).
3) Предприятие приобрело здание за 25000 рублей на следующих условиях: 20% стоимости оплачивается немедленно, оставшаяся часть погашается равными годовыми платежами в течение 8 лет с начислением 12% годовых на непогашенную часть кредита по схеме сложных процентов. Определить величину годового платежа.
4) Предприятие приобрело здание за 15000 рублей на следующих условиях: 25% стоимости оплачивается немедленно, оставшаяся часть погашается равными годовыми платежами в течение 6 лет с начислением 15% годовых на непогашенную часть кредита по схеме сложных кредитов. Определите общую сумму процентов к выплате.
5) При какой схеме вложения на счете в банке будет большая сумма:
   а) в первый год – A_1, во второй год – A_2, в третий год – A_3;
   б) в первый год – A_3, во второй год – A_2, в третий год – A_1,
   если $A_1>A_2>A_3$.
6) Участок сдан в аренду на 8 лет. Арендная плата будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо на следующих условиях: в первые 5 лет по 10 млн. руб., а в оставшиеся три года по 12 млн. руб. Оцените приведенную стоимость этого договора, если процентная ставка равна 15%.

7) Участок сдан в аренду на 10 лет. Арендная плата будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо на следующих условиях: в первые 6 лет по 12 млн. руб., а в оставшиеся четыре года происходит индексация величины платежа на 9%. Оцените текущую цену договора на момент его заключения, если процентная ставка равна 13%.

8) Решите следующие рекуррентные уравнения:

1. $x_{n+1} = x_n + 1, x_1 = 2$; **2.** $x_{n+1} = x_n - 1, x_1 = 2$; **3.** $x_{n+1} = x_n + 1, x_2 = 2$; **4.** $x_{n+1} = x_n - 1, x_2 = 2$; **5.** $x_{n+1} = 2x_n + 1, x_1 = 1$; **6.** $x_{n+1} = -2x_n - 1, x_1 = 1$; **7.** $x_{n+1} = 2x_n + 1, x_2 = 2$; **8.** $x_{n+1} = -2x_n - 1, x_2 = 2$.

9) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = a x_n + b$, $x_1 \neq 0$ и $0 < a < 1$.

10) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = a x_n + b$, $x_1 \neq 0$ и $a > 1, b > 0$.

11) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = a x_n + b$, $x_1 \neq 0$ и $-1 < a < 0$.

12) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = a x_n + b$, $x_1 \neq 0$ и $a < -1, b > 0$.

13) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = a x_n + b$, $x_1 \neq 0$ и $a > 1, b < 0$.

14) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = a x_n + b$, $x_1 \neq 0$ и $a < -1, b < 0$.

15) Инвестору сделано предложение о вложении 200 млн. руб. на срок 5 лет при условии возврата этой суммы частями (ежегодно по 40 млн. руб.). По истечении пяти лет выплачивается дополнительно вознаграждение в размере 50 млн. руб. Принимать ли это предложение, если можно депонировать деньги в банк из расчета 13% годовых?

16) На основании выражения для FM(p%,n) выведите формулу для расчета бессрочного аннуитета, то есть такого, когда денежные поступления продолжаются достаточно длительное время (50 и более лет), что практически эквивалентно $n \to \infty$.

17) С помощью формулы, полученной в задаче 16, вычислить текущую стоимость бессрочного аннуитета с ежегодным поступлением в 100 тысяч рублей, если предлагаемый банком процент по срочным вкладам равен 20% годовых?

d. Нестационарное неоднородное линейное рекуррентное уравнение первого порядка

Нестационарное неоднородное линейное рекуррентное уравнение первого порядка (5) может быть решено с помощью следующей замены переменного:

$$y_n = x_n * \left(\prod_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{-1}$$

Подставив в (5), получим:

$$y_{n+1} * \prod_{i=1}^{n} b_i = \prod_{i=1}^{n} b_i * y_n + c_n \Rightarrow y_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{-1} * c_n .$$

Это означает, что $y_3 - y_2 = c_2 * (b_1 b_2)^{-1}$; $y_4 - y_3 = c_3 * (b_1 b_2 b_3)^{-1}, \dots,$ $y_n - y_{n-1} = c_{n-1} * (b_1 b_2 * \dots * b_{n-1})^{-1}$. Сложив все эти уравнения, получим:

$$y_n = y_2 + \sum_{j=2}^{n-1} c_j * \left(\prod_{i=1}^{1} b_i\right)^{-1} .$$

Так как $y_2 = x_2/b_1$, то

$$x_n = (x_1 + c_1 / b_1) * \left(\prod_{i=1}^{n-1} b_i\right) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j * \left(\prod_{i=j+1}^{n-1} b_i\right), n > 2. \quad (12)$$

Пример 6. На депозитный счет банка изначально положена сумма A = 10000 рублей. В начале второго года было добавлено вкладчиком еще 1000 руб., в начале третьего года на счет он положил 2000 руб., а в начале четвертого – 3000 руб. Сколько было денег на депозите после этого, если годовой банковский процент составляет 20% в первом году, 15% во втором и 10% в третьем?

Решение. $c_1 = 1000$, $c_2 = 2000$, $c_3 = 3000$, $b_1 = 1{,}2$, $b_2 = 1{,}15$, $b_3 = 1{,}1$, $x_1 = 10000$. По формуле (12) получим: $x_4 = (x_1 + c_1/b_1) * b_1 b_2 b_3 + c_2 b_3 + c_3 = (10000+1000/1{,}2)*1{,}2*1{,}15*1{,}1+2000*1{,}1+3000 = 15180 + 1265 + 2200 + 3000 = 21645$ руб.

◆ **Замечание.** При рассмотрении всех вышеперечисленных несложных примеров создается впечатление, что можно прибегать к формулам (7)-(12), а вычислять x_n непосредственно по рекуррентным соотношениям модели

Такое положение имеет место, когда все параметры математической модели (5) известны (известна функция f), а требуется найти лишь x_n при некотором n Такие задачи называются задачами анализа. Но существуют и другие – задачи управления и синтеза экономической ситуации. В них функция f неизвестна (либо неизвестны некоторые ее параметры), и вычисления по рекуррентным формулам алгебраических выражений, зависящих от этих параметров, становится громоздким При проведении расчетов в таких ситуациях отдают предпочтение найденным выше конечным формулам (7)-(12).

Пример 7. Рассчитать минимальное значение процентной ставки, выплачиваемой банком клиенту, если последний имеет 4 млн. руб. и желает, положив их на депозитный счет, получить через 3 года 8 млн. рублей?

Решение. По формуле (3) получим: $8000000 = 4000000\,(1+x)^3$. Это уравнение имеет решение $x = \sqrt[3]{2} - 1 = 0{,}2599$. Процентная ставка $p = 26\%$.

Пример 8. Определить максимальную сумму льготного кредита, выделяемого предприятию, имеющему на депозитном счете в банке A = 10 млн. руб. при годовом банковском проценте p_1=12%, если указанный кредит под годовой процент p_2=5% должен быть погашен в течение десяти лет равными долями?

Решение. По формуле (9) найдем наибольшую величину суммы B, которую предприятие может снимать со своего счета ежегодно. При этом счет в конце десятого года должен быть обнулен. Поэтому $0 = x_n = A * b_n - \frac{b_n - 1}{b - 1} * B$, где n = 10, b = 1+12/100 = 1,12 $\Rightarrow$ B = $10*1{,}12^{10}*0{,}12/(1{,}12^{10}-1) = 10*3{,}106*0{,}12/2{,}106 = 1{,}77$ млн. руб. Поэтому за 10 лет будет снята со счета сумма C = 17,7 млн. руб. С другой стороны, она равна сумме кредита с учетом процента по нему: $X*1{,}05^{10} = 17{,}7 \Rightarrow X = 10{,}8$ млн. руб.

ЗАДАЧИ

1) На депозитный счет банка изначально положена сумма A = 2000 руб. В начале второго года было добавлено вкладчиком еще 1000 руб., в начале третьего года на счет он положил 2000 руб., а в на-

чале четвертого – 3000 руб. Сколько стало денег на депозите после этого, если годовой банковский процент составляет 10% в первом году, 8% во втором и 6% в третьем?

2) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, $x_1=1$.

3) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = (x_n + 2)/(x_n - 2)$, $x_1=1$.

4) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = x_n^3 - 2$, $x_1=1$.

5) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_{n+1} = x_n^{2k+1} - 2$, $x_1=1$.

6) Записать рекуррентное уравнение для вычисления цепной дроби

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$ и вычислить значение дроби.

7) Записать рекуррентное уравнение для вычисления следующего бесконечного выражения:

$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$ и вычислить его

8) Записать рекуррентное уравнение для вычисления следующего бесконечного выражения:

$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots}}}$ и вычислить его

9) Решить следующие рекуррентные уравнения:

1. $x_{n+1} = (\ldots 1)^n x_n, x_1=1$. **2.** $x_{n+1} = (-1)^{n^2} x_n, x_1=1$. **3.** $x_{n+1} = (-1)^n x_n + 1, x_1=1$.

4. $x_{n+1} = (-1)^{n^2} x_n - 1, x_1=1$. **5.** $x_{n+1} = (-2)^n x_n, x_1=1$. **6.** $x_{n+1} = (-2)^n x_n + 1, x_1=1$.

7. $x_{n+1} = 2^{2^n} x_n$, $x_1=1$. **8.** $x_{n+1} = 2^{2^{-n}} x_n$, $x_1=1$. **9.** $x_{n+1} = 2^{2^n} x_n + 1$, $x_1=1$.

10. $x_{n+1} = 2^{2^n} x_n - 1$, $x_1=1$. **11.** $x_{n+1} = 3^{2^n} x_n$, $x_1=1$. **12.** $x_{n+1} = 3^{2^{-n}} x_n$, $x_1=1$.

10) Предприятие продало товар на условиях потребительского кредита с оформлением простого векселя стоимостью 2 млн. руб., сроком – 90 дней, ставка процента за предоставление кредита – 60% годовых. Через 30 дней с момента оформления векселя предприятие решило его учесть в банке по предложенной дисконтной

ставке 85%, а через 45 дней этот же вексель был учтен в другом банке по дисконтной ставке 100%. Рассчитать суммы, полученные предприятием и каждым из банков.

11) Вывести формулу расчета непрерывного начисления процентов для максимально возможного наращивания при бесконечном дроблении годового процента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 479 с.
2. Ковалев В.В. Финансовый анализ. М.: Финансы и статистика, 1990. 512 с.
3. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. 2-е изд., испр. И доп. М.: Дело Лтд, 2000.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 832 с.

Е.А. СЕСЛАВИНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания к практическим занятиям

Подписано в печать 29.09.99.	Формат 60x84/16.	Тираж 100 экз.
Усл.-печ. л – 1,0.	Заказ № 2000.	Цена – 2 руб. 50 коп.
Изд. № 47-99.		(по себестоимости)

101475, Москва, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа

Цена – 2 руб. 50 коп.
(по себестоимости)