МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ СССР
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Кафедра высшей математики

В. Е. ВЕЧТОМОВ, А. В. МАРЧЕНКО, В. Б. МИНАСЯН,
О. А. ПЛАТОНОВА

НАХОЖДЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Методические указания к лабораторной работе

по дисциплине

«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Москва — 1984

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ СССР

Московский ордена Ленина
и ордена Трудового Красного Знамени
институт инженеров железнодорожного транспорта

Кафедра высшей математики

В.В.ВЕЧТОМОВ, Л.В.МАРЧЕНКО, В.Б.МИНАСЯН,
О.А.ПЛАТОНОВА

Утверждено
редакционно-издательским
советом института

НАХОЖДЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Методические указания к лабораторной работе

по дисциплине

"ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА"

для студентов специальности

"Промышленная теплоэнергетика"

Москва - 1984

Вениамин Евгеньевич Вечтомов,
Андрей Владимирович Марченко,
Виген Бабкенович Минасян,
Ольга Алексеевна Платонова

НАХОЖДЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ
СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ
С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА
СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

по дисциплине

"ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА"

Редактор Г.Е.П е р к о в с к а я
Техн.редактор Н.Н.В а с и л ь е в а
Корректор Т.А.Л а т ы ф и ч

Сдано в набор 13/VI-84 Подписано в печать 13/VI-84
Формат 60x90 1/16. Печ.л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,1.
Заказ 1112 Тираж 300 экз. Бесплатно
Редакционно-издательский отдел МИИТа

Типография МИИТа, Москва, ул. Образцова, 15

Цель лабораторной работы. Получение первоначальных навыков в статистическом моделировании на ЭЦВМ и закрепление навыков работы на ЭЦВМ СМ-1.

Оборудование. Дисплейный класс ЭВМ СМ-1.

ВВЕДЕНИЕ

Статистическое моделирование - это обширный класс методов исследования и проектирования разнообразных систем, например, АСУП, технологических процессов, информационных процессов и др. Суть его заключается в том, что для исследования поведения системы в сложных недетерминированных условиях строится ее математическая модель, которая затем "прогоняется" на ЭВМ с различными детерминированными (определенными) внешними (и внутренними) параметрами. При этом, как правило, перебрать все возможные комбинации этих параметров невозможно. Поэтому для оценки поведения модели используют метод статистических испытаний: вводимые в модель наборы параметров задаются "случайным" образом (см. ниже), и полученные результаты после надлежащей математической обработки интерпретируются как статистические характеристики системы.

Основным фактом теории вероятностей, который позволяет применять описанную методику, является утверждение о том, что (при правильной постановке задачи и эксперимента) статистическая частота события стремится к его вероятности по мере роста числа экспериментов, т.е. классическая (или геометрическая) вероятность события совпадает с его статистической вероятностью. Для пояснения сказанного обратимся к примеру.

Задача о встрече. Двое условились о встрече между 11 ч 45 мин и 12 ч 15 мин. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин, после чего, если не появился его товарищ, уходит. Чему равна вероятность их встречи, если каждый с равной возможностью может придти в любой момент в течение указанного промежутка времени и моменты прихода независимы?

Сначала приведем решение, основанное на понятии геометрической вероятности. По оси абсцисс отложим время прихода первого приятеля A, а по оси ординат – второго B. Тогда пространством элементарных исходов Ω в данной задаче служит множество пар чисел (T_A; T_B), где T_A и T_B – моменты приходов A и B к месту встречи. Будем измерять T_A и T_B в минутах, приняв 12 ч за начало координат. Геометрически Ω описывается квадратом со стороной 30 единиц (рис. 1). Геометрическим местом точек одновременного прихода A и B является диагональ квадрата. Встреча произойдет, если один из встречающихся придет на десять минут позже или раньше другого. Следовательно, точки (T_A, T_B) заштрихованной полосы соответствуют моментам прихода, при которых произойдет встреча приятелей:

$$|T_A - T_B| \leq 10 .$$

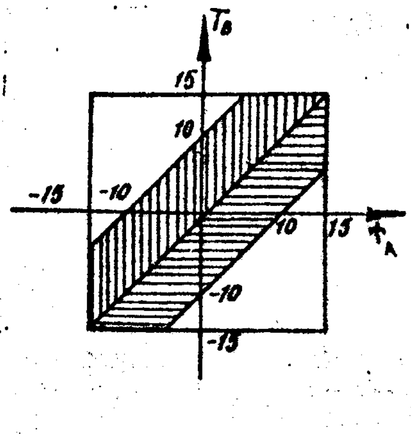


Рис. 1

Таким образом, точки (T_A, T_B) заштрихованной области определяют подмножество $M \subset \Omega$ благоприятствующих исходов испытаний. Следуя геометрической схеме теории вероятностей, вычисляем:

$$p = \frac{S(M)}{S(\Omega)} = \frac{500}{900} = \frac{5}{9} .$$

Продемонстрируем теперь решение этой задачи с помощью метода статистических испытаний. Для этого необходимо прежде всего построить последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_N$ с координатами

$$(T_{A1}; T_{B1}), (T_{A2}; T_{B2}), \dots, (T_{AN}; T_{BN}),$$

которые бы были случайным образом расположены в Ω. Как это сделать конкретно, мы укажем позже, а пока что просто предположим, что такая последовательность точек построена. Тогда каждой точке $x_i \in \Omega$ соответствует один элементарный исход нашего эксперимента с моментами прихода А и В, равными T_{Ai} и T_{Bi} соответственно. Из этих N элементарных исходов благоприятствующими встрече А и В будут те, у которых $|T_{Ai} - T_{Bi}| \leq 10$. Если число таких точек равно K, то статистическая частота равна отношению K к N. При достаточно больших значениях N статистическая вероятность

$$p \sim \frac{K}{N} \qquad (1)$$

дает приближенное значение искомой вероятности, причем, практически полагают, что величина допущенной относительной ошибки при определении вероятности по формуле (1) равна $\sqrt{(N-K)/NK}$.

Следовательно, в задаче о встрече достаточно указать набор чисел

$$T_{A1}, T_{B1}, T_{A2}, T_{B2}, \dots, T_{AN}, T_{BN}$$

таких, чтобы они были "случайны", а точки с координатами (T_{Ai}, T_{Bi}) должны "в среднем равномерно" заполнять Ω; при этом положение следующей точки не должно зависеть от положений предыдущих точек.

Для удовлетворения этим требованиям в современных ЭВМ заложены специальные стандартные подпрограммы, так называемые генераторы или датчики случайных чисел. В машине СМ-1 обращение к такому датчику имеет вид

```
LET   X=RND(0) ,
```

где X - любая переменная (RND~RANDOM). Отметим, что поскольку требуемые пределы изменения X заранее не известны разработчикам ЭВМ, то датчик выдает так называемые псевдослучайные числа с равномерным распределением их на промежутке [0 ; 1]. Эти псевдослучайные числа с большой степенью точности удовлетворяют указанным выше (или аналогичным) требованиям. Поэтому из них можно последовательно набирать координаты требуемых случайных точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Чтобы применить датчик в рассматриваемой задаче, нужно промежуток [0 ; 1] линейно преобразовать к требуемому по условию промежутку [U ; V]. Это можно сделать, обратившись к датчику случайных чисел при помощи команды

LET X = U + (V - U) * RND (0),

где U – нижняя граница требуемого интервала, а V – верхняя его граница. В данной задаче U = -15, V = 15, и команда приобретает вид

LET X = -15 + 30 * RND (0).

Приведем реализацию метода статистических испытаний в задаче о встрече. Комментарии, следующие за операторами, в программу не входят и поэтому не отмечены оператором REM.

10 REM задача о встрече

Вводим счетчик благоприятных исходов.

20 LET K = 0

Организуем цикл для перебора N = 1000 реализаций.

30 FOR I = 1 TO 1000

Придаем случайное значение времени T_A i-й реализации.

40 LET T1 = -15 + 30 * RND (0)

Аналогично для T_B. Операторы 40 и 50 формируют в цикле пространство Ω.

50 LET T2 = -15 + 30 * RND (0)

Проверяем выполнение условия встречи. Если условие встречи $|T_A - T_B| \leq 10$ выполнено, прибавляем к K единицу.

60 IF ABS (T2 - T1) > 10 THEN 80
70 LET K = K + 1

Если условие встречи не выполнено, то в обход оператора 70 идем к оператору NEXT, завершающему цикл.

```
80 NEXT I
```

В результате реализации $N = 1000$ испытаний накоплено K благоприятных исходов. Вычисляем и печатаем ответ.

```
90 PRINT "P=", K/1000
100 END
```

Программа завершена; результат вычислений:
P =.549

При построении статистической модели часто встречается ситуация, когда какой-нибудь из параметров (случайный по своей природе) принимает не непрерывное множество значений (как, например, моменты приходов A и B в задаче о встрече), а одно из дискретного набора значений $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ с известными вероятностями $P(\omega_i)$. Такая ситуация, например, возникает при попытке моделировать бросание игральной кости, которое дает один из шести равновероятных исходов (1,2,...,6 на верхней грани).

В этой задаче вероятностное пространство Ω состоит из 6 элементов - элементарных исходов, имеющих одинаковые вероятности, равные 1/6. Заложенный в ЭВМ датчик случайных чисел моделирует эксперимент, в котором $\Omega_0 = [0; 1]$. Нашей задачей является преобразование Ω_0 в Ω для класса моделей указанного типа (сравните ранее приведенное преобразование Ω_0 в отрезок $[u; v]$).

Чтобы смоделировать вероятностное пространство Ω при помощи пространства Ω_0, поступим следующим образом.

Разобьем Ω_0 на N частей (событий) $A_1, \ldots, A_N$ так, чтобы:

1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, т.е., чтобы разные части не пересекались;
2) $\cup A_i = \Omega_0 = [0; 1]$, т.е. объединение всех частей дает Ω_0;
3) вероятность того, что случайное число X, выработанное ЭВМ и лежащее в Ω_0, принадлежит множеству A_i, равна $P(\omega_i)$ (как это сделать, будет объяснено немного позже).

Теперь каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$ поставим в соответствие событие $A_i \in \Omega_0$. При этом,

события A_i несовместны (это следует из первого условия и отражает тот факт, что в пространстве Ω не могут одновременно иметь места два разных элементарных исхода ω_i и ω_j, $i \neq j$);

объединение всех A_i дает Ω_0, т.е. достоверное событие (это следует из второго условия) и отражает то обстоятельство, что хотя бы один из элементарных исходов ω_i обязательно имеет место);

$P(A_i) = P(\omega_i)$ согласно третьему условию, что собственно и позволяет моделировать Ω с помощью Ω_0.

Отметим, что набор событий A_i, удовлетворяющий первому и второму условиям, нам знаком из курса теории вероятностей, и называется полным набором событий.

Построить набор $A_1, A_2, \dots, A_N$, удовлетворяющий всем трем свойствам несложно. Это можно сделать, например, следующим способом.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ и $P(\omega_i) = P_i$, $\sum P_i = 1$.
Положим $x_0 = 0$, $x_1 = P_1$, $x_2 = P_1 + P_2$, ..., $P_k = \sum_{i=1}^{k} P_i$, ..., $P_N = \sum_{i=1}^{N} P_i = 1$.
Теперь мы выберем множества $A_1, \dots, A_N$ так:

$$A_1 = [0; x_1] = \{x : 0 \leq x \leq x_1\},$$

$$A_2 =]x_1; x_2] = \{x : x_1 < x \leq x_2\},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$A_N =]x_{N-1}; x_N] = \{x : x_{N-1} < x \leq x_N\}.$$

Осталось поставить в соответствии каждому ω_i множество A_i в том смысле, что если случайное число $x = RND(0)$, выработанное датчиком случайных чисел, попало в множество A_i (т.е. $x_{i-1} < x = RND(0) \leq x_i$), то мы считаем, что в моделируемом эксперименте произошел элементарный исход ω_i. При этом вероятность ω_i будет равна вероятности события A_i, т.е. согласно геометрической схеме теории вероятностей

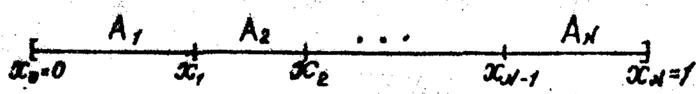
$$(x_i - x_{i-1})/(1-0) = x_i - x_{i-1} = P_i,$$

что и требовалось.

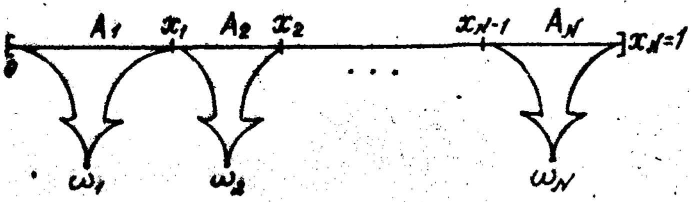
. Геометрически описанное построение можно изобразить так:

Ω состоит из N событий $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$;

Ω_0 – отрезок $[0;1]$, разделенный на отрезки точками x_i :



Соответствие имеет такой вид:



В практике решения задач часто приходится рассматривать дискретные и непрерывные случайные величины. Следующий пример иллюстрирует комбинацию обоих рассмотренных приемов статистического моделирования.

<u>Задача о сопротивлении цепи</u>. В электрической схеме (рис. 2) переключатель с вероятностью 1/3 стоит в положении 1 и с вероятностью 2/3 – в положении 2. Потенциометры R_1 и R_2 имеют случайные сопротивления, заключенные в пределах от 100 до 150 и от 120 до 180 Ом соответственно.

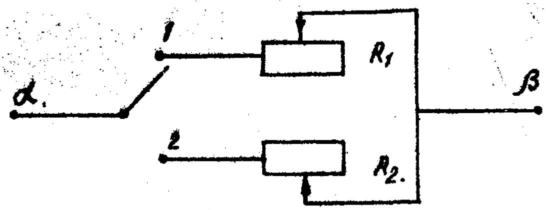


Рис. 2

Найти вероятность того, что сопротивление цепи между точками α и β заключено в пределах от 130 до 140 Ом.

Р е ш е н и е. В данной задаче мы имеем комбинацию дискретного случайного события – выбора цепи и непрерывных случайных событий – равенства сопротивлений R_1 и R_2 каким-то конкретным величинам r_1 и r_2 в промежутках [100; 150] и [120;180] Ом соответственно. Чтобы вычислить вероятность интересующего нас события, будем действовать в два этапа. На первом этапе произведем случайный выбор из двух положений переключателя; на втором – в соответствии с выбранным положением переключателя – выберем случайное значение сопротивления потенциометра, включенного в цепь $\alpha\beta$.

Чтобы сделать первый выбор, воспользуемся описанным выше приемом. Для этого положим

$x_0=0,\ x_1=1/3,\ x_2=1;\ A_1=[0;1/3],\ A_2=]1/3;1]$.

При помощи подпрограммы RND выберем случайное число $x\in[0;1]$ и, если $x\in A_1$, то выберем случайное сопротивление R_1 в пределах от 100 до 150 Ом (положение 1 переключателя). Если же $x>1/3$, то выберем случайное сопротивление R_2 в пределах от 120 до 180 Ом (положение 2 переключателя). Далее все идет как и в задачах с чисто непрерывными параметрами: мы проверяем условия $R\in[130;140]$ Ом; при их выполнении добавляем единицу к счетчику благоприятных исходов N и переходим к следующей реализации численного эксперимента.

Программа, реализующая эту схему, приведена ниже (как и ранее, комментарии, следующие за операторами программы, в нее не входят):

```
10 LET N=0.
```

Установка на 0 счетчика благоприятных исходов.

```
20 FOR I=1 TO 1000
```

Организация цикла перебора реализаций.

```
30 LET X=RND(0)
```

Выбор случайного числа для проверки состояния переключателя.

```
40 IF X>1/3 THEN 70
```

При $x>1/3$ переключатель находится в положении 2 – уходим на выбор сопротивления R_2. При $x\leq 1/3$ переключатель находится в положении 1– выбираем сопротивление R_1.

```
50 LET R=100+50*RND(0)
```

Выбор случайного значения сопротивления R_1.

```
60 GOTO 80
70 LET R=120+60*RND(0)
```

Выбор случайного значения сопротивления R_2.

Общеё сопротивление цепи равно R_1 или R_2 в зависимости от положения переключателя.

```
80 IF R>140 THEN 110
90 IF R<130 THEN 110
```

Проверка условий попадания R в промежуток $[130;140]$ Ом.

```
100 LET N=N+1
```

Добавление единицы к числу благоприятных исходов.

```
110 NEXT I
```

Конец цикла.

```
120 PRINT N/1000
```

Вычисление и печать вероятности события.

```
130 END
```

Результат вычислений: P=0.187.

Суммируя все описанное выше, можно предложить такую схему решения (простейших) задач статистического моделирования.

1. Уяснить себе пространство Ω элементарных исходов задачи.

2. Понять и четко записать в виде неравенств условия, обеспечивающие выполнение события, о котором говорится в каждой конкретной задаче (в задаче о встрече – это $|T_A - T_B|\leq 10$; в задаче о сопротивлении цепи – это $130\leq R\leq 140$). При необходимости проделать в тетради соответствующие выкладки.

3. Организовать в цикле получение последовательности псевдослучайных точек в Ω, использовав для этого датчик случайных чисел и преобразовав его данные как описано выше.

4. Для каждой данной реализации элементарного исхода $\omega \in \Omega$ проверить условия выполнения события. Если условия выполняются, то следует добавить к числу благоприятных исходов единицу; в противном случае – перейти к рассмотрению следующей реализации.

5. Вычислить вероятность события, разделив число накопленных в течение испытаний благоприятных исходов на общее число испытаний.

ОФОРМЛЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Лабораторные работы необходимо оформлять в отдельной (тонкой) тетради, в которую нужно точно переписать условие задачи, предложенной для решения.

2. Описать пространство элементарных исходов и множество исходов, благоприятствующих событию, рассматриваемому в задаче.

3. Представить блок-схему программы.

4. Написать программу вычислений в тетради и проверить ее с преподавателем.

5. Аккуратно подклеить распечатку программы и результат счета в тетрадь для лабораторных работ.

Вводить программу на счет и выводить на печать только с разрешения преподавателя.

Зачет ставится за выполненную и оформленную лабораторную работу только после собеседования студента с преподавателем по тексту задачи и способам составления программы.

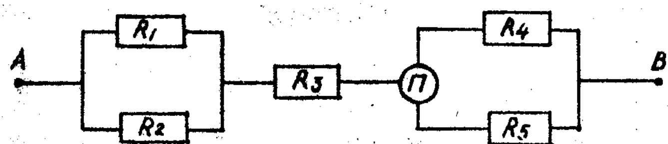
ВАРИАНТЫ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. В сеть, напряжение которой является случайной величиной, равномерно распределенной в промежутке $[U_1, U_2]$, включен нагревательный элемент. Сопротивление нагревательного элемента может равномерно изменяться от R_1 до R_2. Максимальная мощность, которую может выдержать нагревательный элемент, равна 3,5 кВт. Какова вероятность того, что при подклю-

чении нагревательного элемента в сеть он не выйдет из строя, если $[V_1, V_2] = [210; 250]$ В, $[R_1, R_2] = [15; 60]$ Ом?

2. Производится стрельба ракетами по некоторой наблюдаемой цели. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна 0,6; попадания отдельных ракет независимы. Каждая попавшая ракета поражает цель с вероятностью 0,8. Стрельба ведется до поражения цели или до израсходования боезапаса из пяти ракет. Найти вероятность того, что не весь этот боезапас будет израсходован.

3. На одном из участков цепи следующим образом включены переменные резисторы:



Сопротивления резисторов равномерно распределены на промежутках $[1;3]$, $[2;5]$, $[2;4]$, $[1;3]$ и $[5;7]$ Ом соответственно. Найти вероятность того, что сопротивление участка АВ составляет не менее 11 Ом, если переключатель П с равной вероятностью может быть переключен либо на резистор R_4, либо на резистор R_5.

4. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше 2/9?

5. В гидравлике используется формула Базена, выражающая зависимость скорости v течения жидкости в широком прямоугольном канале от глубины h до рассматриваемой точки под свободной поверхностью:

$$v = v_0 - k\sqrt{H \cdot i} \cdot (h/H)^2,$$

где v_0 – скорость на свободной поверхности, H – глубина канала, i – его уклон, k – постоянная. Предположим, что значение k найдено экспериментально, причем, k равномерно распределено в промежутке $[k'; k'']$; уклон принимает три значения h_1, h_2, h_3 с одинаковой вероятностью. Определить вероятность того, что значения скорости точки на произвольной глубине отличаются от среднего значения не более, чем на ε, где $V_0 = 0{,}5$; $H = 10$; $h_1 = 0{,}5$; $h_2 = 0{,}25$; $h_3 = 0{,}3$; $k' = 0{,}1$; $k'' = 0{,}5$; $\varepsilon = 0{,}2$.

6. Параметры α и β системы

$$\begin{cases} 2x + \alpha y = 2 \\ \alpha x + \beta y = 4 \end{cases}$$

случайные числа, равномерно распределенные на промежутках $[2;7]$ и $[-5;-1]$ соответственно. Найти вероятность того, что случайно выбранная пара значений параметров α и β даст неотрицательное решение системы.

7. На эскалаторе длиной $L = 30$ м, движущемся со скоростью V, находится человек, положение которого равновозможно в промежутке $[0;L]$. Человек движется по эскалатору со скоростью W, равномерно распределенной в промежутке $[0; W_0]$. Найти вероятность того, что человек будет находиться на эскалаторе не менее 7, но не более 12 с, если $V = 0{,}93$ м/с, $W_0 = 1$ м/с.

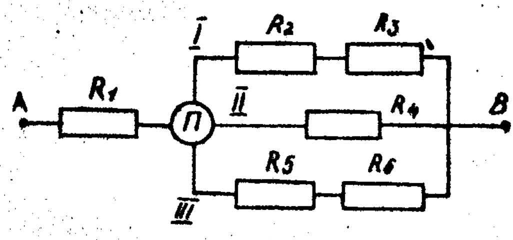
8. На отрезке длиной ℓ наудачу ставятся две точки, которые делят отрезок на три части. Определить вероятность того, что из трех получившихся частей отрезка можно построить треугольник.

9. Производится эксперимент по исследованию сопротивления движению локомотива в режиме холостого хода. В эксперименте участвуют электровозы ВЛ 23, ВЛ 80 и тепловоз ТЭ3, силы тяжести которых соответственно равны 138, 184, 254 ед. силы. Сопротивление движению локомотива вычисляется по формуле

$$W = P \cdot (2{,}4 + 0{,}011 \cdot V + 0{,}00035 \cdot V^2),$$

где P – сила тяжести локомотива, V – скорость локомотива. Считая, что V – случайная величина, равномерно распределенная в промежутке $[50, 100]$, вычислить вероятность того, что для случайно выбранного локомотива сопротивление движению принимает значение из промежутка $[700, 1200]$.

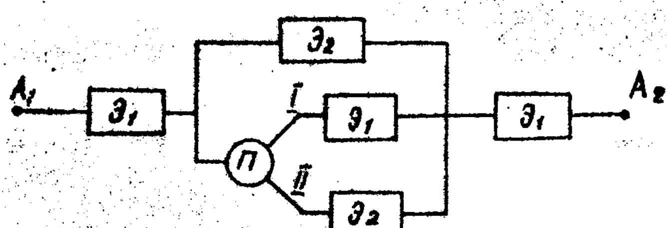
10. На одном из участков цепи следующим образом включены переменные резисторы:



Сопротивления резисторов равномерно распределены на промежутках [10;15], [3;7], [5; 12], [20;30], [9; 18] и [4;10] Ом соответственно. Переключатель может с вероятностью 1/3 быть включен на цепь I, 1/2 – на цепь II, 1/6 – на цепь III. Найти вероятность того, что сопротивление цепи AB составит не менее 30 Ом.

11. Рассмотрим эксперимент, в котором фиксируется направление и скорость ветра по отношению к железнодорожному полотну. Направление определяется соответствующим углом θ ($\theta \in [0^\circ; 360^\circ]$). Скорость ветра считается равномерно распределенной в промежутке $[0; V]$. Определить вероятность того, что проекция скорости ветра на направление железнодорожного полотна меняется в пределах $[V_n'; V_n'']$. Дано: $V = 20$ м/с, $V_n' = 10$ м/с, $V_n'' = 15$ м/с.

12. Блок состоит из элементов двух типов $Э_1$ и $Э_2$, вероятности безотказной работы которых за время t соответственно равны 0,8 и 0,82. Определить вероятность безотказной работы блока:



если при параллельном соединении блок функционирует при исправности даже одного из параллельно соединенных элементов, а переключатель может с вероятностью 1/3 быть включен на цепь I, 1/2 – на цепь П; соответственно, 1/6 – выключен.

13. В равностороннем тругольнике ABC со стороной $a = 4$ ед. из вершин A и B до пересечения с противолежащими сторонами внутри одноименных острых углов случайным образом проводятся прямые. Точка пересечения этих прямых обозначена D. Найти вероятность того, что площадь треугольника ABD составляет величину, лежащую в промежутке $[S/4; S/2]$, где $S = S_{\Delta ABC}$.

14. Производится стрельба ракетами по некоторой наблюдаемой цели. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна 0,5; попадания отдельных ракет независимы. Каждая попавшая ракета поражает цель с вероятностью 0,7. Стрельба ведется до поражения цели или до израсходования боезапаса из четырех ракет. Найти вероятность поражения цели.

15. Секундный расход жидкости, протекающей по капиллярной трубке радиусом R и длиной l при разности давлений $p_1 - p_2$ на концах трубки, равен

$$V = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\pi R^4}{8l} \cdot (p_1 - p_2),$$

где η – вязкость жидкости (вода при 18°C: $\eta = 1{,}05 \cdot 10^{-2}$ Н/(м·с)). Известно, что p_1 и p_2 равномерно распределены на промежутках [100,0; 101,3] и [90,0; 100,0] кПа соответственно, а длина трубки есть случайная величина, равномерно распределённая в промежутке [0,6; 0,9] м. Найти вероятность того, что секундный расход жидкости не превзойдет 2,5 см^3, если $R = 0{,}001$ м.

16. На участке пути между двумя железнодорожными станциями A и B, расстояние между которыми l км, в трех местах произошло повреждение пути. Найти вероятность того, что максимальное растояние между соседними точками поломок не превышает $l/5$, если $l = 50$ км.

17. Прибор, который может выдержать ток не более 5 А, через реостат включается в сеть с напряжением, равномерно изменяющимся от 210 до 250 В. Сопротивление реостата есть случайная величина, равномерно распределенная в промежутке от 30 до 70 Ом. Найти вероятность того, что при случайном включении прибора в сеть он не перегорит (сопротивлением прибора пренебречь).

18. Найти вероятность того, что из трех наудачу взятых стальных брусков, длиной соответственно не более 5, 6, 7 м можно изготовить треугольную конструкцию.

19. Путь состоит из трех участков, на прохождение которых поезд затрачивает время, равномерно распределенное на промежутках $[3;4]$, $[2;2,5]$ и $[5;7]$ ч соответственно. Какова вероятность того, что на весь путь будет затрачено менее 11 ч, если поезд на третьем участке сокращает время движения на 10% при условии, что на первых двух участках время движения составит более 5,5 ч?

20. Три автоматических станка работают в линии независимо друг от друга. Вероятность разладки в течение смены для первого станка равна 0,2, для второго и третьего – 0,25. Определить вероятность разладки в течение смены хотя бы одного станка.

21. Определить вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ вещественны, если значения коэффициентов равновозможны в промежутках $[-2;1,5]$ и $[-3;1]$ соответственно. Какова вероятность того, что при указанных условиях корни будут положительными?

22. Локомотив, движущийся со скоростью V, может доехать из пункта А в пункт В по двум путям, причем путь выбирается случайным образом. Расстояние между А и В по первому пути составляет ℓ_1 км, а по второму ℓ_2 км. На втором пути локомотив может быть с одинаковыми вероятностями остановлен на случайное время τ или пропущен у семафора. Определить вероят-

ность того, что локомотив доедет быстрее по втор... пути, чем по первому, если τ равномерно распределено в промежутке [10;45] мин, $v = 70$ км/ч, $\ell_1 = 150$ км, $\ell_2 = 120$ км.

23. Так называемая работа деформации рамы выражается формулой

$$A = \frac{\ell^3}{2EI}\left(\frac{4}{3}H^2 - NH + \frac{1}{3}N^2 + \frac{1}{3}PH - \frac{1}{4}PN + \frac{1}{10}P^2\right),$$

где P – постоянная нагрузка; N и H – вертикальная и горизонтальная реакции опоры, ℓ – длина рамы, I – момент инерции, E – модуль упругости Юнга.

Пусть N_* и H_* – значения вертикальной и горизонтальной реакций опоры, при которых деформация рамы А принимает наименьшее значение. В результате эксперимента получили случайные данные $\bar{N}$ и $\bar{H}$, которые удовлетворяют условиям $|\bar{N} - N_*| < \delta_1$ и $|\bar{H} - H_*| < \delta_2$. Найти вероятность того, что

$$A(\bar{N}, \bar{H}) > A(N_*, H_*) + \varepsilon,$$

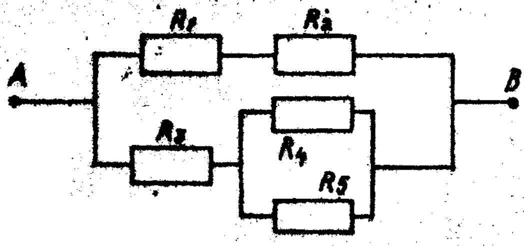
если $P = 10$; $E = 0{,}5$; $I = 4$; $\ell = 3$; $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}25$; $\varepsilon = 0{,}1$.

24. Стальной брусок подрезается до длины x и потом прокатывается. Значение x – случайная величина, равномерно распределенная в промежутке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$. После прокатки длина бруска становится равной $y = \beta x + \varepsilon$, где ε – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Найти вероятность того, что значение y будет отличаться от стандарта z_0 не более чем на $\varkappa$.

Дано: $x_0 = 1{,}5$; $\delta = 0{,}05$; $\beta = 2$; $\varepsilon_0 = 0{,}06$; $z_0 = 3$; $\varkappa = 0{,}02$.

25. Ремонт пути может начаться в случайный момент времени от 9 до 17 часов. Продолжительность ремонта является случайной величиной, равномерно распределенной в промежутке [1;5,5] ч. Если ремонт продолжается более трех часов, то объявляется перерыв на обед на 0,5 ч, а потом работы продолжаются. Найти вероятность того, что работа будет успешно завершена в этот же день.

26. В электрической схеме есть блок, состоящий из резисторов, где R_i ($i = \overline{1,5}$) равномерно распределены в промежутках [490;510], [390;410], [190;210], [1050;950], [1990;2010] Ом соответственно.



Найти вероятность того, что общее сопротивление данного участка цепи отклоняется с точностью 0,2% от 440 Ом.

27. При передаче по цифровому каналу связи непрерывного сигнала

$$\Phi(t) = \sin \omega t\ ,\ t_0 \le t \le t_1\ ,$$

заменяют его дискретными значениями в точках

$$t_k = t_0 + \frac{k}{n}(t_1 - t_0)\ ,\ k = 0, 1, \ldots, n\ .$$

В дальнейшем при приеме функция $\Phi(t)$ восстанавливается как непрерывная функция, являющаяся ломаной, соединяющей соответствующие узлы в точках t_k. Предположим, что из-за помех значения $\Phi(t)$ в точках t_{k_0} и t_{k_0+1} (где номер k_0 является случайным) получили случайными, равномерно распределенными в промежутках $[\Phi(t_{k_0}) - \varepsilon; \Phi(t_{k_0}) + \varepsilon]$ и $[\Phi(t_{k_0+1}) - \varepsilon; \Phi(t_{k_0+1}) + \varepsilon]$.

Определить вероятность того, что $\Phi[(t_{k_0} + t_{k_0+1})/2]$ отличается от истинного значения в этой точке не более, чем на γ, если $\omega = 3$, $t_0 = -1$, $t_1 = 8$, $n = 12$, $\varepsilon = 0{,}1$; $\gamma = 0{,}5$.

28. Сила тока $i(t)$ в цепи с сопротивлением R, самоиндукцией L и ЭДС E удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\frac{di}{dt} + R \cdot i = E\ .$$

Считая ЭДС линейно нарастающей: $E = kt$, а R и L постоянными, значения которых равномерно распределены в промежутках $[R', R'']$ и $[L', L'']$ соответственно, найти вероятность того, что при $t = 10$

$$|i(t) - \frac{kt}{R}| < \varepsilon ,$$

если при $t = 0$; $i = 0$; $k = 0,5$; $R' = 1$, $R'' = 5$, $L' = 3$, $L'' = 7$; $\varepsilon = 0,5$.

29. Параметры α и β функции

$$z = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot xy - 2y^2 - 5x + 3y$$

случайны и равномерно распределены в промежутках $[-3; -0,5]$ и $[1; 4,5]$ соответственно. Найти вероятность того, что функция z будет задавать эллиптический параболоид.

30. Для определения мощности водяного поршневого насоса пользуются формулой

$$N = \frac{1000 \cdot Q(H_1 + H_2)}{60 \cdot \eta},$$

где Q – производительность насоса (м^3/мин); H_1 – высота высасывания (от нижнего уровня до центра насоса); H_2 – высота нагнетания (от центра насоса до сливного отверстия); η – КПД насоса. Считая, что переменная Q принимает для насосов три значения 3, 10 и 20 м^3/мин, с вероятностями 1/4, 1/2 и 1/4 соответственно, H_1 распределена равномерно в промежутке $[1;5]$ м, H_2 – в промежутке $[0;3]$ м, $\eta = 0,8$, вычислить вероятность того, что $|N - \bar{N}| < \delta$, где $\bar{N}$ – среднее арифметическое минимального и максимального значений мощности, а $\delta = 20\% \bar{N}$.