№ 53

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ СССР
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Кафедра высшей математики

А. В. МАРЧЕНКО, В. Б. МИНАСЯН, В. Е. ВЕЧТОМОВ,
О. А. ПЛАТОНОВА

НАХОЖДЕНИЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Методические указания к лабораторной работе

по дисциплине

«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Москва — 1984

МИНИСТЕРСТВО ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ СССР

Московский ордена Ленина
и ордена Трудового Красного Знамени
институт инженеров железнодорожного транспорта

Кафедра высшей математики

А.В.МАРЧЕНКО, В.Б.МИНАСЯН, В.Е.ВЕЧТОМОВ
О.А.ПЛАТОНОВА

Утверждено
редакционно-издательским
советом института

НАХОЖДЕНИЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Методические указания к лабораторной работе

по дисциплине

"ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА"

для студентов специальности
"Промышленная теплоэнергетика"

Москва – 1984

Андрей Владимирович Марченко,
Виген Бабкенович Минасян,
Вениамин Евгеньевич Вечтомов,
Ольга Алексеевна Платонова

НАХОЖДЕНИЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Методические указания к лабораторной работе

по дисциплине

"ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА"

Редактор Г.Е.П е р к о в с к а я
Техн.редактор Н.Н.В а с и л ь е в а
Корректор Т.С.И в а н о в а

Сдано в набор 13. VI-84 Подписано в печать 13/VI-84
Формат 60x90 1/16. Печ.л. 1 Уч.-изд.л. 0,8
Заказ 1111 Тираж 300 Бесплатно
Редакционно-издательский отдел МИИТа

Типография МИИТа, Москва, ул. Образцова, 15

ВВЕДЕНИЕ

Метод статистического моделирования является достаточно универсальным методом решения широкого класса задач, имеющих прикладное значение. Одна из важных задач такого типа – нахождение средних значений (математических ожиданий) и других параметров случайных величин. Мы ограничимся оценками математического ожидания.

Основным достоинством метода является простая структура вычислительного процесса. Как правило, составляется программа, в которой с помощью обращения к генератору случайных чисел (с помощью оператора RND алгоритмического языка Бэйсик) получается случайная величина, равномерно распределенная в промежутке $[0;1]$. Далее, в зависимости от условий задачи из нее формируются нужные случайные величины. Например, равномерно распределенную величину в промежутке $[\alpha;\beta]$ можно получить с помощью команды

$$\text{LET} \quad X = \alpha + (\beta - \alpha) * \text{RND}(0).$$

Затем эта процедура повторяется N раз (с помощью образования цикла), и результаты всех полученных значений X_i усредняются. В качестве эмпирического среднего рассматривается среднее арифметическое полученных значений X_i случайной величины:

$$\bar{X}(N) = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}.$$

При больших N в качестве искомой оценки среднего значения (математического ожидания) случайной величины X рассматривается следующая величина:

$$MX \approx \bar{X}(N).$$

Важной особенностью метода, вытекающей из использования в нем (псевдо) случайных величин, является то, что любая величина, полученная в результате его применения, тоже является случайной. (В частности, $\bar{X}(N)$ как сумма случайных величин тоже является случайной величиной). Поэтому любой результат, полученный при помощи метода статистического моделирования, не может быть абсолютно достоверным, ибо, в принципе, может случиться такое совпадение случайных величин X_i, что, вычислив по ним оценку интересующего нас параметра, мы получим большую ошибку. Однако используя информацию, накапливающуюся при повторении испытаний, можно добиться того, чтобы вероятность ошибки любой заданной величины стремилась к нулю при числе испытаний, стремящемся к бесконечности. Построением таких оценок и их исследованием занимается раздел теории вероятностей, называемый математической статистикой.

В рассматриваемом нами случае – оценке математического ожидания X – ошибка вычислений, как правило, пропорциональна $\sqrt{D/N}$, где D – некоторая постоянная, а N – число испытаний (обоснование смотри ниже). Точнее говоря, если зафиксировать некую вероятность P (>0), с которой можно допустить ошибку величиной больше заданной ε, то ε связано с N формулой

$$\varepsilon \sim \sqrt{D/N}, \tag{1}$$

где D зависит уже только от P и характера исследуемой случайной величины.

Величина $1-P$ называется достоверностью оценки с погрешностью ε. Из формулы (1) видно, что для уменьшения ошибки в 10 раз (иначе говоря, чтобы с прежней достоверностью получить в ответе еще один верный десятичный знак) нужно увеличить N (т.е. объем работы) в 100 раз. Именно поэтому до появления ЭВМ метод статистического моделирования не мог найти сколько-нибудь широкого применения.

Но даже применяя ЭВМ, добиться на этом пути высокой точности невозможно. Точность, получаемая в результате работы ЭВМ (т.е., попросту, число десятичных знаков в ответе), – кажущаяся, ибо это точно вычисленное значение испорчено случайной ошибкой, так сказать "шумом вычислений". При этом существует некий баланс: чем больше знаков ответа мы примем за истинные, тем с большей вероятностью мы ошибаемся, и наоборот. Поэтому обычно считается, что метод статистического моделирования особенно эффективен при решении тех задач, в которых результат нужен с небольшой точностью (5–10%). Однако во многих случаях метод статистического моделирования оказывается единственным численным методом, дающим возможность решить задачу.

Перейдем к обоснованию метода с одновременной оценкой погрешности. Рассмотрим N независимых, одинаково распределенных случайных величин:

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

(их роль играет набор вычисленных псевдослучайных величин x_i). Иначе говоря, законы распределения этих величин совпадают, следовательно, совпадают и их математические ожидания и дисперсия. Обозначим:

$$Mx_1 = Mx_2 = \ldots = Mx_N = m,$$

$$Dx_1 = Dx_2 = \ldots = Dx_N = \sigma^2.$$

Например, если $x_1, \ldots, x_N$ равномерно распределены в промежутке $[\alpha; \beta]$, то, как известно,

$$Mx_1 = Mx_2 = \ldots = Mx_N = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$Dx_1 = Dx_2 = \ldots = Dx_N = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Обозначим через Y_N сумму всех этих величин:

$$Y_N = x_1 + x_2 + \ldots + x_N.$$

Тогда, очевидно,

$$MY_N = N \cdot m \text{ и } DY_N = N \cdot \sigma^2.$$

Теперь рассмотрим нормально распределенную случайную величину ξ_N с такими же параметрами $a = Nm$,

$\sigma^2 = N b^2$. Напомним, что нормальной случайной величиной с параметрами a, σ называется случайная величина ξ, принимающая значения на всей прямой $]-\infty;+\infty[$ и имеющая плотность

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

В этом случае оказывается, что $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$, а также справедливо известное правило "трех сигм":

$$\int\limits_{a-3\sigma}^{a+3\sigma} p(x)\,dx \approx 0{,}997,$$

т.е.

$$P\{a-3\sigma<\xi<a+3\sigma\}\approx 0{,}997,$$

и, таким образом, при одном испытании практически невозможно получить значение ξ, отличающееся от $M\xi$, больше, чем на 3σ.

Следующее утверждение, которое мы приводим без доказательства, известно под названием центральной предельной теоремы теории вероятностей.

<u>Теорема.</u> Плотность распределения Y_N приближается к плотности нормальной величины ξ_N при $N\to\infty$:

$$\lim_{N\to\infty}|p_{Y_N}(x)-p_{\xi_N}(x)|=0.$$

Отсюда и из правила "трех сигм" следует, что

$$P\{Nm-3b\sqrt{N}<Y_N<Nm+3b\sqrt{N}\}\approx 0{,}997,$$

или

$$P\left\{m-\frac{3b}{\sqrt{N}}<\frac{Y_N}{N}<m+\frac{3b}{\sqrt{N}}\right\}\approx 0{,}997.$$

Последнее выражение эквивалентно следующему:

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j-m\right|<\frac{3b}{\sqrt{N}}\right\}\approx 0{,}997. \qquad (2)$$

Это чрезвычайно важное для метода статистического моделирования соотношение, дающее как метод приближенного расчета (характеристику m), так и оценку погрешности. В самом деле, из (2) видно, что среднее арифметическое значений x_j (величина $\bar{x}(N)$) будет приближенно равно m. С большой вероятностью ошибка такого приближения не превосходит величины $3\sigma/\sqrt{N}$. Очевидно, что ошибка стремится к нулю с ростом N.

Таким образом, для получения погрешности не большей $\varkappa(\varkappa > 0)$ нужно, очевидно, взять N такое, что $(3\sigma/N) < \varkappa$, т.е.

$$N > \frac{3\sigma}{\varkappa}. \tag{3}$$

Дисперсию случайных величин X_i тоже можно оценить следующим образом:

$$\sigma^2 = DX = MX^2 - (MX)^2 \le MX^2 \le (\max|x|)^2.$$

Поэтому $\sigma \le \max|x|$. И тогда, очевидно, если взять N, удовлетворяющим неравенству

$$N > \frac{3\max|x|}{\varkappa}, \tag{4}$$

то неравенство (3) будет выполняться.

Например, для равномерно распределенных в $[\alpha;\beta]$ величин получим

$$N > \frac{\sqrt{3}(\beta-\alpha)}{2\varkappa}.$$

Взяв число испытаний N бо́льшим указанного числа, мы практически достоверно получаем среднее значение (математическое ожидание m) с заданной точностью $\varkappa$.

Рассмотрим для примера следующую <u>задачу.</u> Двое приятелей условились о встрече между 11 ч 45 мин и 12 ч 15 мин. Каждый с одинаковой возможностью может придти в любой момент в течение указанного промежутка времени, а моменты прихода независимы. Определить среднее время ожидания первого пришедшего второго с точностью до $\varkappa = 0{,}1$ мин.

Р е ш е н и е. Очевидно, что здесь среднее арифметическое отклонение $\sigma < 30$; тогда (см. (4)), если мы возьмем $N > (3\cdot 30/0{,}1)$, т.е. $N > 900$, то почти достоверно будет достигнута точность $\varkappa = 0{,}1$ мин.

Ниже приведена программа для решения поставленной задачи и дан результат вычислений по этой программе. Комментарии в программу не входят и поэтому не отмечены оператором REM.

```
10 REM среднее время ожидания
20 LET S = 0
```
Через S обозначена сумма времени ожидания.
```
30 FOR I=1 TO 1000
```
Число испытаний N взято равным 1000. Оператор 30 организует цикл для проведения 1000 испытаний.
```
40 LET T1 = -15 + 30 * RND (0)
```
Время 12 ч 00 мин принято за начало отсчета; тогда интервал, в течение которого приятели могут появиться, $[-15; 15]$. Оператором 40 вычисляется очередная реализация случайного момента прихода первого приятеля.
```
50 LET T2 = -15 + 30 * RND (0)
```
То же для второго приятеля.
```
60 LET S = S + ABS (T1 - T2)
```
Добавление времени ожидания ABS(T1-T2) к общей сумме $S = \sum_i x_i$.
```
70 NEXT I
```
В цикле получается 1000 пар случайных моментов прихода приятелей T1 и T2, а оператором 60 накапливается суммарное время ожидания за 1000 испытаний.
```
80 PRINT "среднее время ожидания"; S/1000; "мин"
```
$S/1000 = \sum x_i / N$ и есть оценка среднего времени ожидания. Оператор 80 печатает среднее время ожидания.
```
90 END
```
После команды RUN через некоторое время на дисплее появляется ответ

```
среднее время ожидания S=10.0864 мин.
```

ОФОРМЛЕНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Необходимо разобраться в условии своей задачи и выяснить: среднее значение какой величины надо сосчитать и как эта величина связана с равномерно распределенными в $[0 ; 1]$ величинами.

2. Оценить (грубо), если это требуется, число испытаний N, гарантирующее заданную точность вычислений. В задачах, где это не требуется, число испытаний выбирается порядка 100 или 1000 в зависимости от сложности задачи.

3. Начертить блок-схему программы.

4. Написать программу и произвести по ней вычисления.

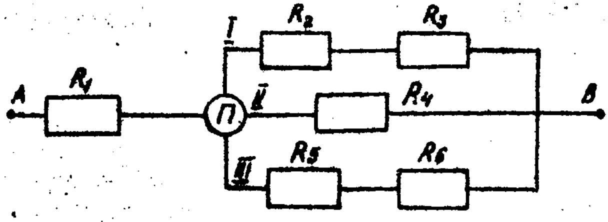
Выводить на печать результат счета только после консультации и с разрешения преподавателя.

5. Распечатка программы и результата счета аккуратно вклеивается в тетрадь (тонкую) для лабораторных работ.

ВАРИАНТЫ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

1. Рассмотрим эксперимент, в котором фиксируется направление и скорость ветра по отношению к железнодорожному полотну. Направление определяется соответствующим углом $\theta \in [0^\circ; 360^\circ]$. Скорость ветра считается равномерно распределенной в промежутке $[0; V]$. Определить среднее значение проекции скорости ветра на направление железнодорожного полотна с точностью 0,1 м/с. Дано $V = 20$ м/с.

2. На одном из участков цепи следующим образом включены переменные резисторы:



Сопротивления резисторов равномерно распределены на промежутках $[10;15]$, $[3;7]$, $[5;12]$, $[20;30]$, $[9;18]$ и $[4;10]$ Ом соответственно. Переключатель может с вероятностью 1/3 быть включен на цепь I, 1/2 – на цепь II, 1/6 – на цепь III. Найти среднее сопротивление цепи АВ с точностью $\alpha = 1$.

3. Секундный расход жидкости, протекающей по капиллярной трубке радиусом R и длиной l при разности давлений $P_1 - P_2$ на концах трубки, равен

$$V = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\pi R^4}{8l}(P_1 - P_2),$$

где η – вязкость жидкости (вода при 18°C; $\eta = 0{,}105 \cdot 10^{-2}$ кг/(м·с)). Известно, что P_1 и P_2 равномерно распределены на промежутках [100,0; 101,3] и [90,0; 100,0] кПа соответственно, а длина трубки есть случайная величина, равномерно распределенная в промежутке [0,6; 0,9] м. Найти средний секундный расход жидкости, если $R = 0{,}001$ м.

4. Частица поглощается экраном одного вида с вероятностью 0,5; экраном другого вида – с вероятностью 0,75. Число экранов, встреченных частицей, случайно и лежит в промежутке между 3 и 15, причем в каждом месте может находиться экран любого из двух видов. Найти среднее число пройденных экранов.

5. На участке пути между двумя железнодорожными станциями А и В, расстояние между которыми l км, в трех местах произошло повреждение пути. Найти вероятность того, что максимальное расстояние между соседними точками поломок не превышает $l/5$ и найти среднюю длину поврежденного участка пути (между крайними точками повреждения), если $l = 50$ км.

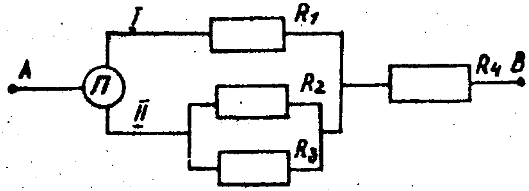
6. В линии три автоматических станка работают независимо друг от друга. Вероятность разладки в течение смены для первого станка 0,2, для второго и третьего станков – 0,25. Найти среднее число работающих станков в течение смены.

7. Производится эксперимент по исследованию сопротивления движению локомотива в режиме холостого хода. В эксперименте участвуют электровозы ВЛ 23 и ВЛ 80 и тепловоз ТЭ3. Сопротивление движению локомотива вычисляется по формуле

$$W = P \cdot (2{,}4 + 0{,}011 \cdot V + 0{,}00035 \cdot V^2),$$

где P — сила тяжести локомотива, V — скорость локомотива. Считая, что V — случайная величина, равномерно распределенная в промежутке [50, 100], вычислить среднее сопротивление движению локомотива с точностью $\gamma = 1$. (ВЛ 80 – 184, ВЛ 23 – 138, ТЭ3 – 254 ед.силы.)

8. На одном из участков цепи следующим образом включены переменные резисторы:



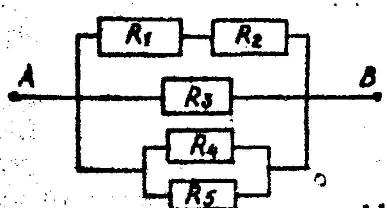
Сопротивления резисторов равномерно распределены в промежутках [7;10], [10;20], [5;10], [2;5] Ом соответственно. Переключатель может с вероятностью 1/3 быть включен на цепь 1 и с вероятностью 2/3 — на цепь П. Найти среднее сопротивление цепи AB.

9. Прибор через реостат включается в сеть, напряжение которой изменяется от 210 до 250 В. Сопротивление реостата есть случайная величина, равномерно распределенная в промежутке от 30 до 70 Ом. Найти среднее значение тока (сопротивлением прибора пренебречь).

10. На отрезке длиной $\ell = 10$ наудачу ставятся две точки, которые делят отрезок на три части. Из них строят треугольник (если это возможно). Определить среднюю площадь треугольника, который может получиться (если треугольник построить нельзя, то считается, что его площадь равна 0).

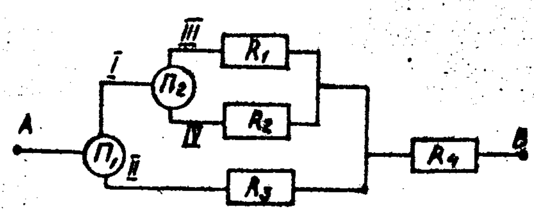
11. На одном из участков цепи следующим образом включены переменные резисторы:

Сопротивления резисторов равномерно распределены на промежутках [5;10], [10;15], [7;10], [2;7] и [20;30] Ом. Найти среднее сопротивление цепи.



12. На эскалаторе длины $L = 30$ м, движущемся со скоростью V, находится человек, положение которого равновозможно в интервале $[0;L]$. Человек сам еще движется по эскалатору со скоростью W, равномерно распределенной в промежутке $[0; W_0]$. Найти среднее время, которое пройдет до схода человека с эскалатора, начиная с рассматриваемого момента, с точностью $\varkappa = 1$ с, если $V = 0{,}93$ м/с и $W_0 = 1$ м/с.

13. На одном из участков цепи следующим образом включены переменные резисторы:



Сопротивления резисторов равномерно распределены на промежутках [5;10], [2;4], [20;25] и [10;15] Ом соответственно. Переключатель $П_1$ с вероятностью 1/3 может быть включен на цепь 1 и с вероятностью 2/3 – на цепь П, а переключатель $П_2$ с вероятностью 1/2 может быть включен на цепь Ш и с вероятностью 1/2 – на цепь 1У. Найти среднее значение сопротивления цепи AB.

14. Параметры α и β системы

$$\begin{rcases} 2x + \alpha y = 2 \\ \alpha x + \beta y = 4 \end{rcases}$$

случайные числа, равномерно распределенные на промежутках [2;7] и [-5;-1] соответственно. Найти среднее значение для каждой из компонент решения x, y.

15. Найти среднюю площадь треугольника, который можно построить из трех наудачу взятых стальных брусков, длиной соответственно не более 5, 6 и 7 м.

16. В гидравлике используется формула Базена, выражающая зависимость скорости V течения жидкости в широком прямоугольном канале от глубины h до рассматриваемой точки под свободной поверхностью:

$$V = V_0 - k \cdot \sqrt{H \cdot i}\,(h/H)^2,$$

где V_0 – скорость на свободной поверхности, H – глубина канала, i – его уклон, k – постоянная.

Предположим, что значение k найдено экспериментально, причем, k равномерно распределено в промежутке $[k', k'']$; уклон принимает три значения i_1, i_2, i_3 с одинаковыми вероятностями. Определить среднюю скорость произвольной точки и сравнить ее с истинным математическим ожиданием, которое надо вычислить предварительно.

Дано: $V_0 = 0{,}5$, $H = 10$, $i_1 = 0{,}5$, $i_2 = 0{,}25$, $i_3 = 0{,}3$, $k' = 0{,}1$, $k'' = 0{,}5$.

17. Путь состоит из трех участков, на прохождение которых поезд затрачивает время, равномерно распределенное на промежутках $[3;4]$, $[2;2{,}5]$ и $[5;7]$ ч соответственно. Найти среднее время движения поезда, если поезд на третьем участке сокращает время движения на 10% при условии, что на первых двух участках время движения составит более 5,5 ч.

18. Стальной брусок подрезается до длины x и потом прокатывается. Значение x – случайная величина, равномерно распределенная в промежутке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$. После проката длина бруска становится равной $y = \beta x + \varepsilon$, где ε – случайная величина, равномерно распределенная в промежутке $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Определить среднюю длину бруска.

Дано: $x_0 = 1{,}5$, $\delta = 0{,}05$, $\beta = 2$, $\varepsilon_0 = 0{,}06$.

19. Найти среднее значение максимума двух положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, а их произведение не больше 2/9, с точностью $\varkappa = 0{,}01$.

20. При передаче по цифровому каналу связи непрерывного сигнала

$$\Phi(t) = \sin \omega t, \quad t_0 \le t \le t_1,$$

заменяют его дискретными значениями в точках

$$t_k = t_0 + \frac{k}{n} \cdot (t_1 - t_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

В дальнейшем при приеме функция $\Phi(t)$ восстанавливается как непрерывная функция, являющаяся ломаной, соединяющей соответствующие узлы в точках t_k. Предположим, что из-за помех значения $\Phi(t)$ в точках t_{k_0} и t_{k_0+1} (где номер k_0 является случайным) получились случайными, равномерно распределенными в промежутках

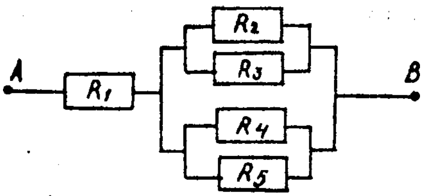
$$[\Phi(t_{k_0})-\varepsilon;\Phi(t_{k_0})+\varepsilon] \text{ и } [\Phi(t_{k_0+1})-\varepsilon;\Phi(t_{k_0+1})+\varepsilon].$$

Определить среднюю погрешность при вычислении

$$\Phi[(t_{k_0}+t_{k_0+1})/2].$$

Д а н о: $\omega = 3$, $t_0 = -1$, $t_1 = 9$, $n = 12$, $\varepsilon = 0{,}1$.

21. На одном из участков цепи следующим образом включены переменные резисторы:



Сопротивления резисторов равномерно распределены в промежутках [9;14], [5;10], [25;30], [4;8] и [5;10] Ом. Найти среднее сопротивление цепи AB.

22. Для определения мощности водяного поршневого насоса пользуются формулой

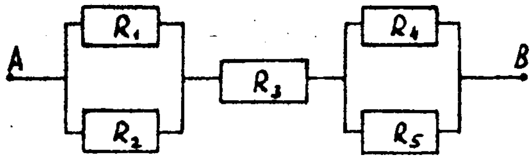
$$N = \frac{1000 \cdot Q(H_1+H_2)}{60 \cdot \eta},$$

где Q – производительность насоса (м^3/мин); H_1 – высота высасывания (от нижнего уровня до центра насоса); H_2 – высота нагнетания (от центра насоса до сливного отверстия); η – КПД насоса.

Считая, что переменная Q принимает для насосов три значения 3,10 и 20 м^3/мин с вероятностями 1/4, 1/2 и 1/4 соответственно; H_1 распределена равномерно в промежутке [1;5] м, H_2 – в промежутке [0;3] м, а $\eta = 0{,}8$, вычислить среднюю мощность насоса.

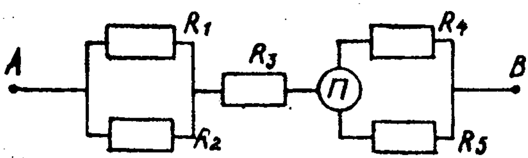
23. В электрической схеме есть блок, состоящий из резисторов, где R_i $(i=\overline{1,5})$ равномерно распределены в промежутках [490;510], [390;410], [190;210],

[950;1050] и [1990;2010] Ом соответственно. Найти среднее сопротивление цепи.



24. Производится стрельба ракетами по некоторой наблюдаемой цели. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна 0,6; попадания отдельных ракет независимы. Каждая попавшая ракета поражает цель с вероятностью 0,8. Стрельба ведется до поражения цели или израсходования боезапаса из пяти ракет. Найти среднее число израсходованных ракет.

25. На одном из участков цепи следующим образом включены переменные резисторы:



Сопротивления резисторов равномерно распределены в промежутках [1;3], [2;5], [2;4], [1;3] и [5;7] Ом соответственно. Найти среднее значение сопротивления цепи AB с точностью $\varkappa = 0{,}1$, если переключатель П с равной вероятностью может быть переключен либо на резистор R_4, либо на резистор R_5.

26. Локомотив, движущийся со скоростью v, может доехать из пункта A в пункт B по двум путям, причем путь выбирается случайным образом. Расстояние между A и B по первому пути составляет ℓ_1 км, по второму – ℓ_2 км. На втором пути он может быть остановлен на случайное время τ или пропущен у семафора с одинаковыми вероятностями, где τ равномерно распределено в промежутке [10;45] мин. Найти среднее время локомотива в пути, если $v = 70$ км/ч, $\ell_1 = 150$ км, $\ell_2 = 120$ км.

27. В сеть, напряжение которой является случайной величиной, равномерно распределенной в промежутке от U_1 до U_2, включен реостат. Сопротивление может равномерно изменяться от R_1 до R_2. Найти среднюю мощность, рассеиваемую на нагревательном элементе, если $[U_1, U_2] = [210;250]$ В, $[R_1, R_2] = [15;50]$ Ом.

28. Так называемая работа деформации рамы выражается формулой

$$A = \frac{\ell^3}{2EI}\cdot\left(\frac{4}{3}H^2 - NH + \frac{1}{3}N^2 + \frac{1}{3}PH - \frac{1}{4}PN + \frac{1}{10}P^2\right),$$

где P – постоянная нагрузка; N и H – вертикальная и горизонтальная реакции опоры, ℓ – длина рамы, I – момент инерции, E – модуль упругости Юнга. ($P=10$; $\ell=3$; $I=4$; $E=0{,}5$)

Определить среднее значение работы, если H – случайная величина, равномерно распределенная в промежутке $[0;2]$, а N – случайная величина, равномерно распределенная в промежутке $[2;5]$.

29. Ремонт пути может начаться в случайный момент от 8 до 17 ч. Продолжительность ремонта является случайной величиной, равномерно распределенной в промежутке $[1;5{,}5]$ ч. Если ремонт продолжается более трех часов, то объявляется перерыв на обед на 0,5 ч, а потом работы продолжаются. Определить среднее время ремонта.

30. Сила тока в цепи, сопротивление которой R, самоиндукция L, ЭДС E, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\frac{di}{dt} + R\cdot i = E.$$

Считая ЭДС линейно нарастающей $E = k\cdot t$, а R и L постоянными, значения которых равномерно распределены в промежутках $[1;5]$ Ом и $[3;7]$ Гн соответственно, найти среднюю силу тока при $t = 10$, если $i = 0$, при $t = 0$, коэффициент $k = 0{,}5$.