МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Управление и информатика в технических системах»

А.И. СЕСЛАВИН
В.И. УРДИН

ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания к лабораторной работе

по дисциплине «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

МОСКВА–2005

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Управление и информатика в технических системах»

А.И. Сеславин
В.И. Урдин

Утверждено
дакционно-издательским
советом университета

ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания к лабораторной работе
по дисциплине
«ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
для студентов специальности
«УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ»

Москва-2005

УДК 681.5.012/013:681.3
С 28

Сеславин А.И., Урдин В.И. Типовые звенья систем автоматического управления: Методические указания. - М.: МИИТ. 2005, - 15 с.

В методических указаниях рассматриваются временные и частотные характеристики типовых звеньев САУ.

1.Цель работы.

Цель лабораторной работы состоит в закреплении теоретических знаний и практических навыков получения временных и частотных характеристик типовых звеньев САУ.

2.Теоретическая часть.

Типовым звеном называется элементарная часть САУ, описываемая линейным дифференциальным уравнением определённого вида. К числу основных типовых звеньев относятся:

1. инерционное звено (апериодическое звено первого порядка)

$$T\frac{dx_в(t)}{dt}+x_в(t)=kx_{вх}(t) \qquad (1)$$

2. интегрирующее звено

$$x_в(t)=k\int_0^t x_{вх}(t)\ dt \qquad (2)$$

3. реальное дифференцирующее звено (дифференцирующее с замедлением)

$$T\frac{dx_в(t)}{dt}+x_в(t)=k\frac{dx_{вх}(t)}{dt} \qquad (3)$$

4. колебательное звено

$$T^2\frac{d^2x_в(t)}{dt^2}+2T\xi\frac{dx_в(t)}{dt}+x_в(t)=k\ x_{вх}(t) \qquad (4)$$

где $\xi<1$.

Типовые звенья играют исключительную роль в структурном анализе САУ, т. е. анализе САУ по её структурной схеме, определении ошибок регулирования, анализе систем на устойчивость и синтезе корректирующих устройств.

Разработка исходной структурной схемы САУ заключается в составлении исходных адекватных математических моделей отдельных элементов САУ, представляющих собою, обычно, одно или несколько алгебраических и дифференциальных уравнений, перехода от исходных линейных или линеаризованных уравнений отдельных элементов

САУ к их передаточным функциям и, наконец, в графическом представлении этих элементов в виде передаточных функций с указанием направления передачи выходной величины каждого звена.

Как было отмечено выше по структурной схеме САУ решаются все основные задачи анализа и синтеза САУ, в том числе получение передаточных функций замкнутой САУ и её временных и частотных характеристик. Иногда для получения последних характеристик необходимо знать соответствующие характеристики отдельных, в том числе и типовых, звеньев САУ. В связи с этим рассмотрим определения характеристик звеньев, способы их получения в общем виде и конкретные выражения для типовых звеньев $(1)\div(4)$.

Передаточной функцией звена или системы называется отношение изображения (по Лапласу) выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях на переменные состояния системы. Для получения передаточной функции звена $W(p)$ необходимо в дифференциальном уравнении звена перейти от оригиналов входной и выходной величины к их изображениям при нулевых начальных условиях. В общем виде для звена, описываемого линейным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$a_0\frac{d^n x_в(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x_в(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dx_в(t)}{dt}+a_n x_в(t)=$$
$$=b_0\frac{d^m x_{вх}(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}x_{вх}(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+ \quad (5)$$
$$+b_{m-1}\frac{dx_{вх}(t)}{dt}+b_m x_{вх}(t)$$

передаточная функция $W(p)$ будет иметь следующий вид:

$$W(p)=\frac{x_в(p)}{x_{вх}(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_{m-1}p+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n} \quad (6)$$

В соответствии с (5) и (6) передаточные функции элементарных звеньев $(1)\div(4)$ будут иметь, соответственно следующий вид:

$$W_1(p)=\frac{k}{T_p+1},\ W_2(p)=\frac{k}{p},\ W_3(p)=\frac{k\ p}{T_p+1},$$

$$W_4(p)=\frac{k}{T^2p^2+2T\xi p+1} \tag{7}$$

Отметим, что передаточную функцию (6) любой реальной устойчивой системы можно представить в виде последовательного и параллельного соединения четырёх указанных звеньев (7), что и позволяет выделить их и назвать типовыми.

Временными характеристиками звеньев является переходная функция $h(t)$ и импульсная функция $k(t)$. Переходной функцией звена $h(t)$ называется реакция звена на единичную функцию $1(t)$

$$1(t)=\begin{cases}1 & при \quad t\ge 0\\ 0 & при \quad t<0\end{cases}, \tag{8}$$

а импульсной функцией звена $k(t)$ называется реакция звена на дельта-функцию Дирака $\delta(t)$

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & при \quad t=0\\ 0 & при \quad t\ne 0\end{cases}, \tag{9}$$

причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\ dt=1$.

Для получения временных характеристик $h(t)$ и $k(t)$ для звена с передаточной функцией $W(p)$ необходимо записать изображение выходной величины

$$x_в(p)=W(p)x_{вх}(p) \tag{10}$$

приняв для единичного входного сигнала $1(t)$ его изображение $x_{вх}(p)=L\{1(t)\}=\frac{1}{p}$, а для входного сигнала в виде дельта-функции

$x_{вх}(p) = L\ \{\delta(t)\} = 1$. Применяя обратное преобразование Лапласа к $x_в(p)$, получим $h(t)$ при $x_{вх}(p) = \dfrac{1}{p}$ и $k(t)$ при $x_{вх}(p) = 1$.

В частности, оригинал $x_в(t)$ по изображению $x_в(p)$, представленному в виде дробно-рациональной функции $x_в(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$, где степень числителя не больше степени знаменателя, могут быть получены по формуле разложения для простых полюсов

$$x_в(t) = \sum \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \tag{11}$$

или по формуле разложения для кратных полюсов

$$x_b(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(r_k - 1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{r_k - 1}}{dp^{r_k - 1}} \left\{ (p - p_k)^{r_k} e^{pt} \frac{A(p)}{B(p)} \right\} \tag{12}$$

где $B'(p) = \dfrac{dB(p)}{dp}$;

$n -$ степень многочлена знаменателя;

p_x – Х-тый простой полюс, т.е. корень знаменателя $B(p) = 0$ в формуле (11);

p_k – К-тый кратный корень в формуле (12);

r_k – кратность К-ого корня;

$l -$ общее число групп одинаковых корней в формуле (12).

Если учесть все выше изложенное для получения переходной и импульсной функции, то для каждого из элементарных звеньев $(1) \div (3)$ получим с помощью (11) и (12) следующие зависимости

$$h_1(t) = k\left(1 - e^{-t/T}\right), \quad k_1(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}$$

$$h_2(t) = kt\,,\quad k_2(t) = \delta(t) + K \tag{13}$$

$$h_3(t) = \frac{k}{T}e^{-t/T}\,,\quad k_3(t) = \frac{k}{T}\delta(t) - \frac{k}{T^2}e^{-t/T}1(t)$$

Более сложно получить переходную функцию колебательного звена $h_4(t)$. Для него найдем:

$$B(p) = p\left(T^2p^2 + 2T\xi p + 1\right),\quad B'(p) = 3T^2p^2 + 4T\xi p + 1 \tag{14}$$

и в соответствии с (11) получим:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{K}{3T^2p_i^2 + 4T\xi p_i + 1}e^{p_i t}\,, \tag{15}$$

где $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -\frac{\xi}{T} \pm j\frac{1}{T}\sqrt{1-\xi^2}$.

Заметим, что знаменатель в (15) может быть представлен в виде

$$3T^2p^2 + 4T\xi p + 1 = 3(T^2p^2 + 2T\xi p + 1) - 2T\xi p - 2 = -2T\xi p - 2$$

, и тогда

$$h(t) = K(1 - \frac{1}{2(1+T\xi p_2)}e^{p_2 t} - \frac{1}{2(1+T\xi p_3)}e^{p_3 t}) =$$

$$K(1 - RE\{\frac{1}{1+T\xi p_2}e^{p_2 t}\}) = K(1 - e^{-\frac{\xi}{T}t}RE\{(\cos(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t) +$$

$$+ j\sin(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t))/(1-\xi^2 + j\xi\sqrt{1-\xi^2})\} = \tag{16}$$

$$= K(1 - e^{-\frac{\xi}{T}t}(\sqrt{1-\xi^2}\cos(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t) + \xi\sin(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t))/\sqrt{1-\xi^2}) =$$

$$= K(1 - e^{-\frac{\xi}{T}t}\sin(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + arctg\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})/\sqrt{1-\xi^2}).$$

Переходная функция $h_4(t)$ в соответствии с (16) представляет собой затухающую синусоиду, скорость затухания которой определяется величиной $\frac{\xi}{T}$, названной Гауссом логарифмическим декрементом затухания.

Импульсная функция колебательного звена имеет следующий вид

$$k_4(t) = \frac{dh_4(t)}{dt} = \frac{K}{T\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t). \qquad (17)$$

Другой группой характеристик типовых звеньев САУ являются **частотные характеристики**. Так как типовые звенья являются линейными, т.е. описываются линейными дифференциальными уравнениями $(1) \div (4)$, то при подаче на вход таких звеньев синусоидального входного сигнала $x_{вх}(t) = A_{вх} \sin(\omega t + \varphi_{вх})$ на выходе в установившемся режиме будем иметь $x_в(t) = A_в \sin(\omega t + \varphi_в)$, т.е. синусоиду той же частоты, что и входная синусоида, но с другой амплитудой и другой фазой, значения которых будут определяться не только амплитудой и, соответственно, фазой входной синусоиды, но и частотой входной синусоиды.

Покажем, что это так с помощью формулы разложения (11). Изображение оригинала $x_{вх}(t) = A_{вх} \sin \omega t$ имеет вид и, соответственно,

$$x_{вх}(p) = \frac{A_{вх}\omega}{p^2 + \omega^2}$$

В соответствии с (11) имеем

$$x_в(p) = W(p) X_{вх}(p) = \frac{A(p)}{B_1(p)} \cdot \frac{A_{вх}\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{A(p)}{B(p)} A_{вх}\omega$$

$$x_в(t) = A_{вх}\omega \left(\sum_{k=1}^{n-2} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} + \frac{A(j\omega)}{B_1(j\omega)\cdot 2j\omega} e^{j\omega t} + \frac{A(-j\omega)}{B_1(j\omega)(-2j\omega)} e^{-j\omega t} \right) \qquad (18)$$

В выражении (18) первые (n-2) слагаемых стремятся к нулю при $t \to \infty$, так как для устойчивой системы $n-2$ корня уравнения $B_1(p)=0$ лежат в левой полуплоскости корней, поэтому в установившемся режиме

$$x_в(t)=\frac{A_{вх}}{2}\left(\frac{W(j\omega)}{j}e^{j\omega t}+\frac{W(-j\omega)}{-j}e^{-j\omega t}\right)=$$

$$=\frac{A_{вх}}{2}\left(W(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j\omega t}+W(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-j\omega t}\right)=$$

$$=\frac{A_{вх}}{2}W(\omega)\left(e^{j\left(\omega t+\varphi(\omega)-\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-j\left(\omega t+\varphi(\omega)-\frac{\pi}{2}\right)}\right)=$$

$$=\frac{A_{вх}}{2}W(\omega)2\cos\left(\omega t+\varphi(\omega)-\frac{\pi}{2}\right)=A_{вх}W(\omega)\sin(\omega t+\varphi(\omega)).$$

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) звена или системы называется зависимость отношения амплитуды выходной синусоиды к амплитуде входной синусоиды от частоты входной синусоиды

$$W(\omega)=\frac{A_в(\omega)}{A_{вх}(\omega)}. \quad (19)$$

Фазно-частотной характеристикой (ФЧХ) звена или системы называется зависимость разности фаз выходной и входной синусоид от частоты входной синусоиды

$$\varphi(\omega)=\varphi_в(\omega)-\varphi_{вх}(\omega). \quad (20)$$

АЧХ и ФЧХ звена можно получить по передаточной функции $W(p)$ заменой p на $(j\omega)$ и записи частотной характеристики $W(j\omega)$ в показательной форме

$$W(j\omega)=W(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (21)$$

Если представить частотную характеристику $W(j\omega)$ в алгебраической форме

$$W(j\omega)=B(\omega)+jM(\omega), \quad (22)$$

то получим вещественно-частотную характеристику (ВЧХ) $B(\omega)$ и мнимо-частотную характеристику(МЧХ) $M(\omega)$.

В соответствии с (21) запишем выражения АЧХ и ФЧХ для типовых звеньев $(1) \div (4)$

$$W_1(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} \qquad \varphi_1(\omega) = -arctg(T\omega)$$

$$W_2(\omega) = \frac{K}{\omega} \qquad \varphi_2(\omega) = -\frac{\pi}{2} \tag{23}$$

$$W_3(\omega) = \frac{K\omega}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} \qquad \varphi_3(\omega) = \frac{\pi}{2} - arctg(T\omega)$$

$$A_4(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}} \qquad \varphi_4(\omega) = \begin{cases} -arctg\frac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2} \text{ при } \omega \le \frac{1}{T} \\ -\pi - arctg\frac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2} \text{ при } \omega > \frac{1}{T} \end{cases}.$$

3.Пояснения к расчету временных и частотных характеристик на ЭВМ.

В общем случае, когда порядок системы $n > 3$, мы не можем воспользоваться формулой разложения (11) или (12) для получения $h(t)$. Если же необходимо найти реакцию схемы $x_в(t)$ на любое заданное входное воздействие $x_{вх}(t)$, то единственным методом решения этой задачи является численное интегрирование на ЭВМ (например, методом Эйлера или Рунге-Кутта). Этот метод предполагает запись математической модели системы в так называемой нормальной форме или форме Коши

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i(t) + k_i x_{вх}(t) \qquad i = 1,2,\dots,n$$

$$x_в(t) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i(t) + l x_{вх}(t) \tag{24}$$

Если система задана передаточной функцией $W(p)$ в виде (6), то для получения численным методом реакции этой системы на заданное входное воздействие $x_{вх}(t)$ необходимо математическую модель системы представить в виде (24). Такой переход не однозначен. В частности, он может быть осуществлен по так называемой схеме Горнера. Запишем (6) в виде:

$$x_в(p)(a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_{n-1}p + a_n) = x_{вх}(p)(b_0p^m + b_1p^{m-1} + ... + b_{m-1}p + b_m) \qquad (25)$$

в последнем выражении расставим скобки следующим специальным образом:

$$(..((a_0x_в - b_0x_{вх})p + (a_1x_в - b_1x_{вх}))p + ... + (a_{n-1}x_в - b_{m-1}x_{вх})p + a_nx_в - b_mx_{вх}) = 0 \qquad (26)$$

обозначая самую внутреннюю скобку как y_1

$$y_1 = a_0x_в - b_0x_{вх}, \qquad (27)$$

вторую скобку как y_2 и т.д. и замечая, что p - символ дифференцирования, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= y_2 - (a_1x_в - b_1x_{вх}) \\ dy_2/dt &= y_3 - (a_2x_в - b_2x_{вх}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dy_n/dt &= -(a_nx_в - b_mx_{вх}) \end{aligned} \qquad (28)$$

Из уравнения (27) получим $x_в = (y_1 + b_0x_{вх})/a_0$ и из (28) систему дифференциальных уравнений в нормальной форме по передаточной функции вида (6) в следующем окончательном виде

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= y_2 - (a_1(y_1 + b_0x_{вх})/a_0 - b_1x_{вх}) \\ dy_2/dt &= y_3 - (a_2(y_1 + b_0x_{вх})/a_0 - b_2x_{вх}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dy_n/dt &= -a(y_1 + b_0x_{вх})/a_0 - b_mx_{вх} \end{aligned} \qquad (29)$$

Алгоритм расчета частотных характеристик по передаточной функции состоит в замене оператора p на jω, представлении числителя A(jω) и знаменателя B(jω) в алгебраической форме с последующим переходом к записи W(jω) в алгебраической форме для получения ВЧХ и МЧХ или в показательной форме для получения АЧХ и ФЧХ.

Часто рациональный выбор масштаба может резко упростить построение графика функции и дальнейшую работу с ним. Это касается построения графиков АЧХ , ФЧХ и АФЧХ. Оказывается, что здесь целесообразен логарифмический масштаб, при котором по оси абсцисс откладывается десятичный логарифм частоты - lgω. Это обстоятельство связано с тем, что диапазон возможных частот бесконечен и при равномерный выбор точек для расчета не целесообразен. В случае выбора логарифмического масштаба, частоты, в которых подсчитываются все частотные характеристики составляют не арифметическую, а геометрическую прогрессию и, в этом случае, лучше представляют изучаемую характеристику.

4. Рабочее задание.

1. Принять следующие численные значения параметров передаточных функций инерционного звена $W_1(p)=\dfrac{2N}{Np+1}$, интегрирующего звена $W_2(p)=\dfrac{N}{p}$, реального дифференцирующего звена $W_3(p)=\dfrac{2Np}{Np+1}$, колебательного звена $W_4(p)=\dfrac{N}{N^2p^2+1{,}5Np+1}$, где N – номер бригады.

2. Рассчитать на ЭВМ по программе PEREHOD таблицы переходных функций указанных типовых звеньев. При запросе программы следует вводить следующие численные значения времени интегрирования T, шага численного интегрирования h и шага печати m (печатается каждый m-ный шаг интегрирования):

для $W_1(p)$	T=4N,	h=0,1N,	m=1,
для $W_2(p)$	T=1,	h=0,1,	m=1,
для $W_3(p)$	T=4N,	h=0,1N,	m=1,
для $W_4(p)$	T=10N,	h=0,05N,	m=10.

3. Рассчитать на ЭВМ по программе FREQ ВЧХ, МЧХ, АЧХ и ФЧХ всех указанных типовых звеньев. Запрашиваемый программой диапазон частот в логарифмическом масштабе задать $-2 \le \lg\omega \le 2$, а логарифм шага изменения частоты d=0,2.

4. По результатам п.2 построить расчётные переходные функции каждого звена.

5. По результатам п.3 построить расчётные АЧХ, ФЧХ и годографы каждого звена.

5. Теоретические вопросы.

1. Вывести переходные функции (13) с помощью теоремы разложения в виде (11) или (12).

2. Найти h(0) и h(∞) для $W_3(p) = \dfrac{Kp}{Tp+1}$ с помощью теорем о начальном и конечном значении оригинала

$$h(0) = \lim_{p\to\infty} px_в(p),$$

$$h(\infty) = \lim_{p\to 0} px_в(p).$$

3. Вывести выражения ВЧХ, МЧХ, АЧХ и ФЧХ для каждого из типовых звеньев по передаточным функциям (7).

4. Построить по выражениям п.3 теоретические АЧХ, ФЧХ и годограф для каждого звена.

5. Определить амплитуду и фазу синусоиды на выходе интегрирующего звена $W(p) = \dfrac{10}{p}$ при подаче на вход синусоиды $x_{вх}(t) = 5\sin(3t + 30^\circ)$.

6. Вывести характеристики h(t), k(t), A(ω), φ(ω) и качественно построить годограф W(jω) для консервативного звена $W_5(p) = \dfrac{K}{T^2p^2+1}$ и неустойчивого звена 1-ого порядка $W_6(p) = \dfrac{K}{Tp-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков Н.А. и др. Теория автоматического управления. – М. Высшая школа, 1977. ч. 1.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П., Теория систем автоматического управления, «Наука», 1966
3. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления. Под ред. Бесекерского В.А., «Наука», 1969

Содержание

Учебно-методическое издание

Сеславин Андрей Игоревич
Урдин Виктор Иванович

ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания к лабораторной работе по дисциплине «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

Подписано в печать - 21.06.05. Формат 60x84/16 Тираж 100 экз.

Усл. печ. л. - 1,0. Заказ - 408. изд.№ 98 - 05.

127994, Москва, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа