ВЕРСИТЕТ

Кафедра «Вычислительная математика»

Н.Н.Брушлинская

Задача о минимизации рисков

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета в качестве методических указаний

для студентов строительных специаль~~ностей~~

Москва - 2007

УДК 519.6
Б 89
Брушлинская Н.Н. Задача о минимизации рисков. Методические указания к лабораторным работам. М.:МИИТ, 2007 -

Предлагаемые методические указания представляют собой продолжение методических указаний по лабораторному практикуму для студентов 2-ого курса строительных специальностей ИПСС.

Тематика данных математических указаний продолжает работу В.Д. Жука и Н.Б. Логиновой «Теория вероятностей и введение в математическую статистику».

Работа направлена на развитие навыков мышления в решении актуальных задач о минимизации рисков.

Задачи, предлагаемые для лабораторных работ, используют сочетание алгебраических методов, статистического моделирования и анализа.

§1 Постановка задачи.

Предприятие реализует 3 типа продукции – T_1, T_2, T_3 – по фиксированным ценам a_1, a_2, a_3 и на фиксированную сумму A;

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = A$

Здесь x_1, x_2, x_3 - количества проданной продукции каждого из типов T_1, T_2, T_3.

За каждую единицу проданной продукции каждого из типов предприятие должно делать отчисления b_1, b_2, b_3, в результате чего оно имеет расход F.

$F = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$.

Величины x_1, x_2, x_3 являются случайными, независимыми и подчинены нормальному закону распределения вероятностей.

Задача состоит в том, чтобы построить интервальную оценку расходов F, т. е. построить интервал $[F_1, F_2]$, где F_1 - возможная минимальная сумма расходов; а F_2 - возможная максимальная сумма расходов.

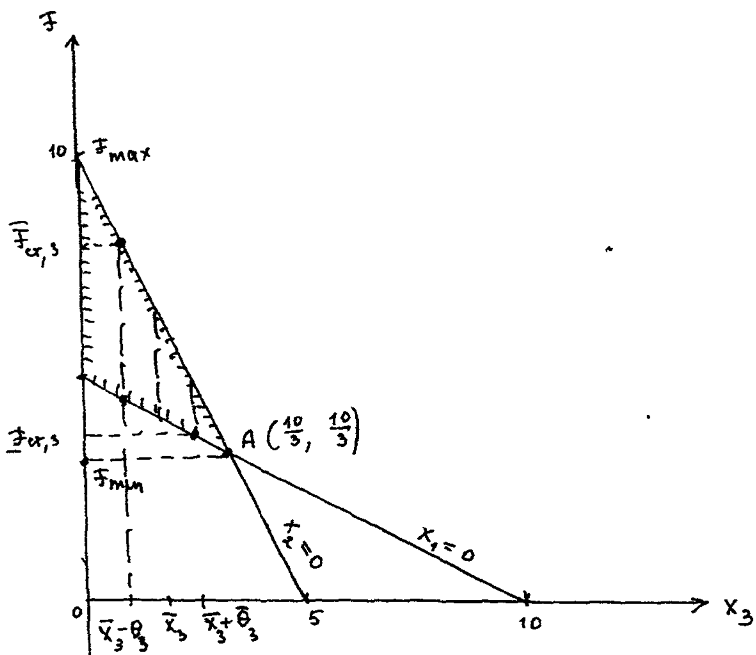
<u>Числовой пример</u>:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = F \\ x_1 \geq 0; \;\; x_2 \geq 0; \;\; x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

1.1 Разрешим систему (1) относительно x_1 и x_2

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 10 + 2F \ge 0 \\ x_2 = 10 - F - 2x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Построим систему неравенств (2)



$$F_{min} < \underline{F}_{cr,3} < F < \overline{F}_{cr,3} < F_{max}$$

рис.1

Каждая точка заштрихованного треугольника соответствует набору величин (x_1, x_2, x_3), которые реально могут осуществиться.

Однако, если каждая из величин x_1, x_2, x_3 имеет нормальное распределение, то существует для каждой из величин – среднее $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ и доверительные интервалы $(\overline{x}_1 - \underline{\Theta}_1, \overline{x}_1 + \overline{\Theta}_1), (\overline{x}_2 - \underline{\Theta}_2, \overline{x}_2 + \overline{\Theta}_2),$
$(\overline{x}_3 - \underline{\Theta}_3, \overline{x}_3 + \overline{\Theta}_3)$.(Формулы вычисления величин $\overline{x}_i, \underline{\Theta}_i, \overline{\Theta}_i, i = 1,\ 2,\ 3$, приведены в §2).

Алгебраические методы дают для расходов F оценку: $F_{\min} \le F \le F_{\max}$.

Однако статистическая оценка интервала расходов F может оказаться более точной.

Для этого, кроме случая **1.1**, необходимо рассмотреть случаи **1.2** и **1.3**, в которых система (1) разрешается соответственно относительно переменных x_1, x_3 и x_2, x_3. И к каждой независимой случайной величине x_1, x_2, x_3 применить статистические методы.

1.2 Разрешим систему (1) относительно x_1, x_3:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}(10 + x_2 - 3F); \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}(F + x_2 - 10); \quad (3) \\ x_1 \ge 0;\ \ x_2 \ge 0;\ \ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Построим систему неравенств (3).

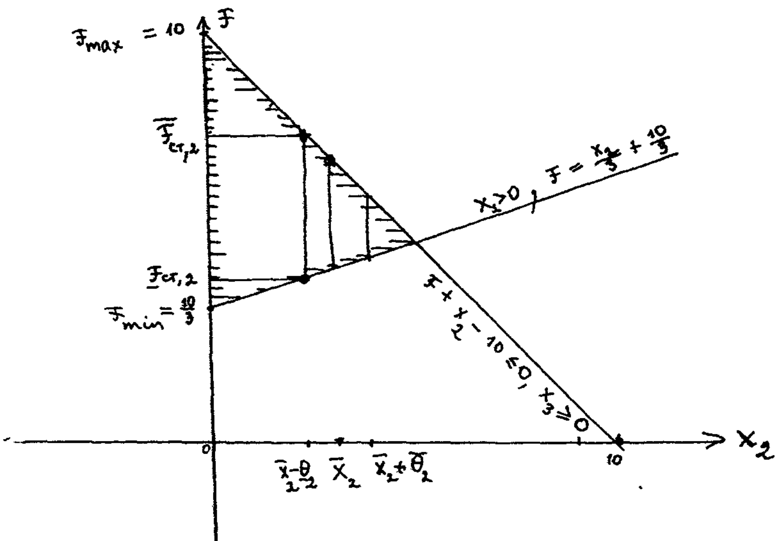


рис. 2

$$F_{min} \le \underline{F}_{ст,2} \le F \le \overline{F}_{ст,2} \le F_{max}$$

1.3 Разрешим систему (1) относительно x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_2 = -10 - 2x_1 + 3F \\ x_3 = x_1 - 2F + 10 \\ x_1 \ge 0; \;\; x_2 \ge 0; \;\; x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Построим множество допустимых значений x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих системе (1)

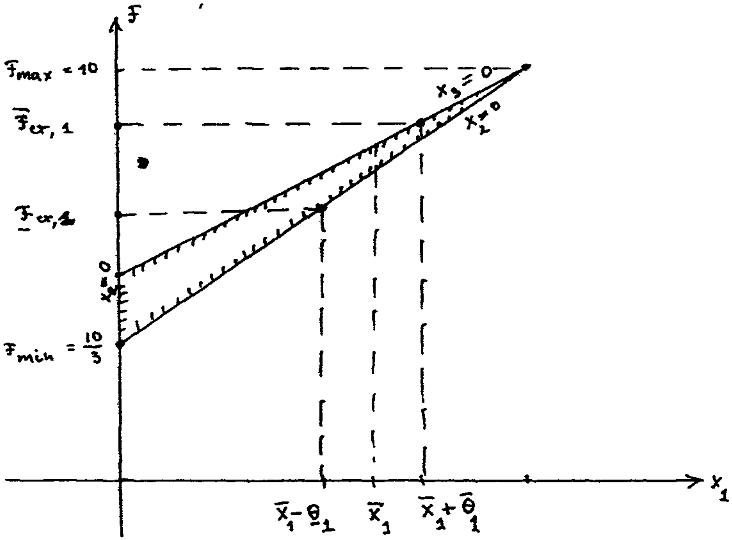


рис.3

$$F_{min} \le \underline{F}_{cr,2} \le F \le \overline{F}_{cr,1} \le F_{max}$$

рис.3

Если спрос на продукцию T_1, T_2, T_3 достаточно устойчив и определен, и отклонения от средних значений $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ невелики, то статистический анализ задачи может быть эффективен: он может дать гораздо более точную интервальную оценку расходов F с вероятностью, например, 0,999.

В качестве F_1 можно взять наименьшее из

$\underline{F}_{cm,1}, \underline{F}_{cm,2}, \underline{F}_{cm,3}$.

В качестве F_2 можно взять наибольшее из

$\overline{F}_{cm,1}, \overline{F}_{cm,2}, \overline{F}_{cm,3}$.

Неравенство $F_{\min} \le F \le F_{\max}$ реализуется с вероятностью 1, но интервальная оценка $[F_{\min}, F_{\max}]$ оказывается слишком грубой.

Неравенство $F_1 \le F \le F_2$ оказывается менее грубым. Но такое неравенство реализуется с вероятностью, меньшей 1, например, с вероятностью 0,999.

§2. Вычисление величин $\overline{x}$, $\underline{\Theta}$ и $\overline{\Theta}$.

Пусть x - нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием a и известной дисперсией $D[x]$. Задача состоит в построении доверительного интервала для неизвестного математического ожидания a.

В качестве оценки параметра a возьмём выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Величина $\overline{x}$ распределена нормально и её математическое ожидание равно a, $M[\overline{x}] = a$;

Случайная величина $\overline{x} - a$ также распределена нормально и её математическое ожидание равно нулю, $M[\overline{x} - a] = 0$;

Дисперсия случайной величины $\bar{x} - a$ равна

$$D[\bar{x} - a] = \frac{D[x]}{n}$$

Случайная величина $\frac{\bar{x} - a}{\sqrt{D[x]/n}}$ распределена нормально с параметрами 0 и 1.

Пусть $\Phi(x)$ - функция распределения случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение.

Зададимся доверительной вероятностью α и определим величину x_α из уравнения $\Phi(x_\alpha) = 1 - 0{,}5\alpha$.

Тогда с вероятностью $p = 1 - \alpha$ будет выполнено неравенство: $\bar{x} - x_\alpha \sqrt{\frac{D[x]}{n}} \le a \le \bar{x} + x_\alpha \sqrt{\frac{D[x]}{n}}$.

Это означает, что с вероятностью $p = 1 - \alpha$ интервал $\left(\bar{x} - x_\alpha \sqrt{\frac{D[x]}{n}}, \bar{x} + x_\alpha \sqrt{\frac{D[x]}{n}}\right)$ накрывает неизвестный параметр a.

Итак, $\underline{\Theta} = \bar{x} - x_\alpha \sqrt{\frac{D[x]}{n}}$; $\overline{\Theta} = \bar{x} + x_\alpha \sqrt{\frac{D[x]}{n}}$.

Так как в предлагаемой задаче $D[x]$ - неизвестно, то вместо $D[x]$ используют оценку дисперсии

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x} - x_i\right)^2$ и рассматривают величину

$$\frac{\bar{x} - a}{\sqrt{S^2/n}}.$$

При достаточно больших n распределение величины

$\frac{\bar{x} - a}{\sqrt{S^2/n}}$ близко к нормальному.

Строим доверительный

интервал: $\left(\bar{x} - t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}}, \bar{x} + t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right)$.

Этот интервал с вероятностью $p = 1 - \alpha$ накрывает оцениваемый параметр a, т.е. неравенства

$\bar{x} - t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}} \le a \le \bar{x} + t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}}$ выполняются с вероятностью $p = 1 - \alpha$.

Величины $\underline{\Theta}$ и $\overline{\Theta}$ определяются равенствами

$$\underline{\Theta} = \bar{x} - t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}}; \quad \overline{\Theta} = \bar{x} + t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{S^2}{n}}.$$

Для величины $t_{\alpha,n-1}$ имеются таблицы (В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2003).

Учебно-методическое издание

Брушлинская
Надежда Николаевна

Задача о минимизации рисков

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к лабораторным работам
по дисциплине
«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Подписано к печати -30.10.07.
Формат – 60x84/16 Усл -печ л. - 0,75. Тираж - 100
Изд. № 3-07 Заказ № 575,

127994, г. Москва, ул. Образцова, 15
Типография МИИТа