МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Вычислительная математика»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Часть 1

Методические указания к практическим занятиям

по дисциплине «Высшая математика»

МОСКВА – 2008

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Вычислительная математика»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Часть 1

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве методических указаний

для студентов строительных специальностей

МОСКВА – 2008

УДК 514.12
А 64

Григорец О.А., Данилова И.А., Занина Л.Н., Козлов О.К., Перфилова Н.П.

Аналитическая геометрия. Часть 1. Методические указания к практическим занятиям. – М.: МИИТ, 2008. – 12с.

Данные методические указания охватывают основные типы задач раздела аналитической геометрии. Эти задачи могут быть использованы при проведении практических занятий, в качестве домашних заданий, а также для текущего контроля успеваемости.

Тема 1. Определители. Системы линейных уравнений.

Пример 1. Вычислить определитель двумя способами. Сначала – разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(10+0) + 4(5+0) + 1(3+2) =$$

$$= 30 + 20 + 5 = 55.$$

Теперь вычислим этот определитель, используя свойства определителей. Для этого из последней строки вычтем первую, умноженную на 5 , и полученный определитель разложим по последнему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -16 & 23 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -16 & 23 \end{vmatrix} =$$

$$= 23 + 32 = 55.$$

Задание1. Вычислить определители (первый – используя определение, второй – используя свойства определителей).

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 8 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Задание 2. Решить, если она совместна, систему уравнений.

1. $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 6x - 8y = 10 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x + 4y = 12 \\ 2x + 7y = 19 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 13x + 12y = -9 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 6x + 10y = 22 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 3x + 5y = 12 \\ 2x + 7y = 19 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + 3y = 17 \\ 4x + 6y = 24 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 3x - 5y + 1 = 0 \\ 7x + 3y + 17 = 0 \end{cases}$

Задание 3. Решить уравнение или неравенство.

1) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ 2) $\begin{vmatrix} x^2 & 3x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix} \geq 0$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & 22+x \end{vmatrix} = 0$

4) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$ 5) $\begin{vmatrix} \sin x & \sin 2x \\ -1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$ 6) $\begin{vmatrix} x & -5 \\ x & x \end{vmatrix} \le 0$

7) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-4 & x+2 \end{vmatrix} = -6$ 8) $\begin{vmatrix} \log_2 x & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \ge 12$ 9) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$

10) $\begin{vmatrix} 2x & \sin 3x \\ 4x & 1 \end{vmatrix} = 0$ 11) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7-x & 2 \end{vmatrix} > 0$ 12) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} \le 0$

13) $\begin{vmatrix} x-6 & 3 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 0$ 14) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}\, x & 2 \\ \sin x & 1 \end{vmatrix} = 0$

Индивидуальные задания. Решить системы уравнений, спользуя формулы Крамера.

1) $\begin{cases} 3x+y+z=-2 \\ 5x-y-z=10 \\ x-y+5z=-12 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y-3z=13 \\ 3x-2y+4z=-15 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x \quad +z=6 \\ 2x \quad -z=2 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-3y+5z=-7 \\ x+y+z=-4 \\ 5x+3y-4z=11 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+3y-3z=13 \\ 2x-3y+3z=-10 \\ x+z=0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x-y-z=10 \\ 2x \quad +3z=-7 \\ x-y-z=6 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 5x+y+3z=14 \\ 2x+y+2z=5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x - y + 7z = -28 \\ 3x \quad - 4z = 13 \\ x - 3y + z = -15 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x - y + z = -4 \\ 3x + y - z = -1 \\ 4x - 2y + 3z = -7 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = -4 \\ 3x + 2y + 5z = 22 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 5x - 4y + z = 4 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ \quad 2y - z = 2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x - 5y + 4z = -3 \\ 3x + 6y - 9z = 18 \\ x + y + z = -4 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x - y + 4z = 15 \\ 3x - y + z = 8 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = -5 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 \\ 5x \quad + 3z = 7 \\ x - 3y + 7z = 5 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 3x - 3y + 4z = -10 \\ 2x + 3y - 2z = 13 \\ x \quad + z = 0 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 3x \quad + 2z = 12 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ 3x \quad + z = 9 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x + y - z = -4 \\ x + 2y - 2z = 3 \\ x - 3y + 4z = -6 \end{cases}$

20) $\begin{cases} x - y + 9z = 26 \\ 3x + 2y - 3z = -2 \\ 2x + 3y - 4z = -4 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 5x \quad + 5z = 23 \\ x \quad + 2z = 8 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \\ x - y + 2z = -5 \end{cases}$

23) $\begin{cases} 3x - y + 2z = -1 \\ 6x \quad - 4z = -2 \\ x - y + 5z = -12 \end{cases}$

24) $\begin{cases} x - y - 3z = 13 \\ 4x - 3y + z = -2 \\ 5x - y + 3z = -15 \end{cases}$

25) $\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 3x - 6y + z = -4 \\ x - 4y - z = -8 \end{cases}$

Тема 2. Декартова система координат. Основные задачи аналитической геометрии.

Пример 2. Точки *A(-8;5), B(2;7), C(0;-3)* – вершины треугольника *ABC*. Найти точку *K* пересечения его медиан и длину медианы *CM*.

Решение. Точка *M* – середина отрезка *AB*, значит её координаты

$$x = \frac{-8+2}{2} = -3, \quad y = \frac{5+7}{2} = 6,$$

т.е. *M(-3;6)*.

Точка пересечения медиан *K* делит медиану *CM* в отношении $\lambda = CK:KM = 2$. По формулам деления отрезка в данном отношении координаты точки *K* равны:

$$x = \frac{0+2\cdot(-3)}{1+2} = -2, \quad y = \frac{-3+2\cdot 6}{1+2} = 3,$$

т.е. точка *K(-2;3)*.

Вектор $\overline{CM}$ имеет координаты $\overline{CM} = (-3-0\ ;\ 6-(-3)) = (-3;9)$. Значит длина медианы $\overline{CM}$

$$|\overline{MC}| = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Задание 1. Решить задачу.

1. Является ли равнобедренным треугольник с вершинами *A(3;6), B(6;3), C(1;1)* ?

2. Доказать, что точки *(1;2), (-1;1), (3;-5), (3;-1)* являются последовательными вершинами трапеции.

3. Найти единичный вектор, параллельный вектору *AB*, если *A(2;4), B(-1;5)*.

4. На оси ординат найти точку, одинаково удалённую от точки *(-2;5)* и начала координат.

5. Найти четвёртую вершину параллелограмма, если даны три его последовательные вершины *(-4;5), (-2;5), (5;-7)*.

6. Лежат ли на одной прямой точки *(0;1), (-3;-1), (6;5)* ?

7. Доказать, что треугольник с вершинами *(-2;2), (0;5), (6;1)* прямоугольный.

8. На оси Ох найти точку A такую, что *AB = 10*, а *B(6;-6)*.

9. Найти точку *B*, симметричную точке *A(-3;-1)* относительно биссектрисы второго координатного угла. Найти расстояние *AB*.

10. Найти длину диагонали *BD* параллелограмма *ABCD*, если *A(1;3), B(8;5), C(6;-1)*.

Задание 2.

1. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-3;5)$, $B(1;7)$ и точка пересечения диагоналей $M(1;1)$. Найти две другие вершины.

2. Вершины треугольника $A(1;4)$, $B(3;-9)$, $C(-5;2)$. Найти длину его медианы BK и угол между BK и Oy.

3.Найти координаты точек деления отрезка AB на три равные части, если $A(1;-3)$, $B(4;3)$. Найти расстояние от точки В до начала координат и до оси Ox.

4. Зная вершины параллелограмма $A(3;-5)$, $B(5;-3)$, $C(-1;3)$, найти его вершину D, точку пересечения диагоналей и AD.

5. Точки $(2;-1)$, $(-1;4)$, $(-2;2)$ – середины сторон треугольника. Найти его вершины.

6. Найти координаты концов отрезка AB, который точками $P(2;2)$ и $Q(1;5)$ разделен на три равные части.

7. Найти расстояние от начала координат до точки пересечения медиан треугольника с вершинами $(3;1)$, $(3;-2)$, $(4;0)$.

8. Найти длины диагоналей параллелограмма, если даны три его последовательные вершины $(-1;2)$, $(2;4)$, $(5;-1)$.

9. Найти длину медианы OC и биссектрисы OD треугольника ABC с вершинами $A(8;0)$, $B(0;6)$, $O(0;0)$.

10. В треугольнике ABC известны $B(-3;2)$, $C(5;4)$ и точка пересечения медиан $M(2;1)$. Найти точку A и длину медианы AL.

Тема 3. Кривые второго порядка.

Пример 3. Построить кривую

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$$

Эта кривая является окружностью, так как коэффициенты при x^2 и y^2 оба равны +1. Найдём центр и радиус окружности..

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 - 3 = 0,$$
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Значит, центр окружности $C(2; -3)$ и радиус $R = 4$.

Задание 1. Построить окружности.

1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ 2) $x^2 + y^2 + 5x - 7y + 2,5 = 0$

3) $x^2 + y^2 + 7 = 0$ 4) $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 20$

5) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 23$ 6) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 13 = 0$

7) $x^2 + y^2 + 8y + 15 = 0$ 8) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$

9) $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 0{,}75$ 10) $x^2 + y^2 + 10x - y + 21{,}25 = 0$

11) $x^2 + y^2 + x - 3y + 1{,}5 = 0$ 12) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$

Задание 2. Построить кривые. Найти фокусы и эксцентриситет эллипсов и гипербол.

1) $4y^2 - x^2 - 16 = 0$, $y = \frac{x^2}{2} - x - 1$

2) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 2$, $y = 2x^2 + 8x + 1$

3) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 9$, $x = -y^2 + 8x + 1$

4) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 3$, $y = 2x^2 - 8x + 13$

5) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{9} = 4$, $y = -x^2 + 4x - 7$

6) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 6$, $y = -x^2 + 5x + 7$

7) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 16$, $y = 2x^2 - 2x + 3$

8) $x^2 + \frac{y^2}{9} = 4$, $x = -2y^2 + 8x + 3$

9) $4x^2 - 9y^2 = 36$, $y = x - x^2$

10) $4x^2 + 9y^2 = 36$, $x = y - y^2$

Задание 3. Найти точки пересечения кривых и построить их.

Пример Построить кривые $x^2 - 2x + 4y^2 - 16y + 13 = 0$ и $x + y - 4 = 0$ и найти их точки пересечения.

Решение Преобразуем уравнение первой кривой:

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (4y^2 - 16y + 16) - 16 + 13 = 0$, следовательно

$(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 4$ или $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{1} = 1$. Значит,

имеем эллипс с полуосями $a = 2$, $b = 1$ и центром $(1;2)$.

Второе уравнеие $y = 4 - x$ описывает прямую, пересекающую оси координат в точках $(0;4)$ и $(4;0)$. Для нахождения точек пересечения данных линий надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 4 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

Подставим $y = 4 - x$ в первое уравнение, получим уравнение $5x^2 - 18x + 13 = 0$, решая которое, найдем корни: $x_1 = 1$, $x_2 = 2{,}6$.

Соответственно, получим: $y_1 = 3$, $y_2 = 1{,}4$, т.е. точки пересечения данных линий: $A(1;3)$, $B(2{,}6;1{,}4)$.

1) $x^2 + 8x + y^2 = 0$, $y = 2x$.

2) $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $x + y = 4$.

3) $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 7$, $3x + 4y = 10$.

4) $x^2 - 2x + y^2 + 2y = 14$, $2x - y + 1 = 0$.

5) $x^2 + 6x + y^2 = 16$, $x + 2y = 7$.

6) $x^2 + x + y^2 + y = 0$, $y = 3x$.

7) $x^2 - x + y^2 + y = 0$, $y = 3x$.

8) $x^2 + x + y^2 - y = 0,$ $y = 3x.$

9) $x^2 + y^2 + 4y = 0,$ $x - y = 0.$

10) $x^2 + y^2 + 7y = 0,$ $2x + y = 0.$

Полярная система координат.

Пример Записать уравнение кривой $r = 4\cos\varphi$ в декартовых координатах и построить эту кривую.

Решение Уравнение $r = 4\cos\varphi$ описывает окружность радиуса 2 с центром в точке: $\varphi = 0$, $r = 2$. Связь декартовых координат с полярными осуществляется по формулам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Подставляя эти значения r и $\cos\varphi$ в уравнение кривой $r = 4\cos\varphi$ будем иметь

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ т.е. } x^2 + y^2 - 4x = 0 \text{ или } (x - 2)^2 + y^2 = 4.$$

Задание 4. 1.Построить точки, полярные координаты которых имеют следующие значения:

1) $(\pi/6, 4)$	4) $(\pi/2, 3)$	7) $(\pi/3, 5)$
2) $(2\pi/3, 1)$	5) $(5\pi/6, 2)$	8) $(\pi/4, 2)$
3) $(\pi, 5)$	6) $(3\pi/4, 1)$	9) $(3\pi/2, 6)$

Найти декартовы координаты этих точек.

2. Преобразовать к декартовым координатам уравнения линий и построить линии:

1) $r = 6\sin\varphi$	4) $r = 5$	7) $r = 3\sin\varphi$
2) $r\cos\varphi = 1$	5) $r\sin\varphi = 4$	8) $r = 3$
3) $\mathrm{tg}\varphi = 3$	6) $r = \cos\varphi$	9) $\mathrm{ctg}\varphi = 2$

Учебно-методическое издание

Ольга Александровна Григорец
Людмила Николаевна Занина
Ирина Александровна Данилова
Нина Петровна Перфилова
Олег Константинович Козлов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

часть 1

Методические указания
к практическим занятиям
по дисциплине
«Высшая математика»