МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Вычислительная математика»

Л.М. МАСЕЕВ, А.И. ГУСЕВ, Н.Б. ЛОГИНОВА

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания
к лабораторным работам

по дисциплине
«Высшая математика»

МОСКВА – 2008

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Вычислительная математика»

Л.М. Масеев, А.И. Гусев, Н.Б. Логинова

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний
для студентов II курса специальности СГС

Москва – 2008

УДК 519.6
М20

Масеев Л.М., Гусев А.И., Логинова Н.Б. Итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Высшая математика». – М.: МИИТ, 2008. – 12 с.

Методические указания предназначены для студентов II курса специальности СГС и включают в себя лабораторную работу, посвященную численному решению СЛАУ методом последовательных приближений. Системы линейных алгебраических уравнений наиболее просты и в то же время к ним сводятся многие математические и физические задачи.

При выполнении лабораторной работы требуются знания из уже пройденных курсов математики и информатики.

Итерационный метод дает возможность найти решение системы как предел бесконечного вычислительного процесса, позволяющего по уже найденным приближениям к решению построить следующее, более точное, приближение. Привлекательной чертой такого метода является его «самоисправляемость» и простота реализации. Если при реализации точных методов вычислительная ошибка, если она не компенсируется другими случайными ошибками, неизбежно ведет к появлению ошибки в результате, то при использовании сходящегося итерационного процесса ошибка в каком–то приближении исправляется в ходе последующих вычислений, и такое исправление требует проведения лишь нескольких дополнительных шагов однотипных вычислений. Чтобы начать итерационный процесс, необходимо знать одно или несколько начальных приближений к решению. Условия и скорость сходимости каждого итерационного процесса существенно зависят от свойств решаемых систем уравнений, то есть от свойств матрицы системы, и от выбора начальных приближений.

1. Система линейных алгебраических уравнений

А) Рассмотрим квадратную систему линейных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{1}$$

где a_{ij} – заданные действительные коэффициенты системы,

b_i – заданные правые части системы,

x_j – неизвестные, значения которых требуется найти,

$i = 1 \ldots n$, $j = 1 \ldots n$.

Нахождение неизвестных $x_1, \cdots, x_n$ означает нахождение их значений таких, подстановка которых в уравнения системы (1) обращает их в тождества.

Потребуем, чтобы главный определитель системы (1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов a_{ij} при неизвестных, был отличен от нуля. В этом случае система (1) имеет, и притом единственное, решение.

Б) Система уравнений (1) может быть записана в матричном виде. Для этого рассмотрим основную матрицу системы (1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

определитель $|A|$ которой отличен от нуля ($|A| \neq 0$), а также вектор–столбец, составленный из правых частей $b_1, \cdots, b_n$ системы (1)

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

и вектор–столбец неизвестных $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда матричная запись системы (1) выглядит следующим образом:

$$AX = B, \qquad (2)$$

где матрица A и вектор–столбец B – заданы, а вектор–столбец X подлежит определению. Вектор X является решением матричного уравнения (2), если подстановка вектора X в матричное уравнение (2) обращает это уравнение в тождество.

Заметим, что запись системы в виде (1) называется скалярной записью системы линейных уравнений.

2. Приведение системы уравнений к каноническому виду, удобному для итераций

Для того чтобы начать реализацию метода простых итераций, исходная система должна быть переписана в специальном, эквивалентном, виде, удобном для итераций. Рассмотрим на примерах несколько возможных способов приведения системы (1) к виду, удобному для итераций.

Пример 1. Рассмотрим систему (1). Из первого уравнения выразим x_1, из второго – x_2, и т.д. вплоть до n-ого уравнения, из которого выразим x_n. Тогда получаем эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \cdots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{n-1} = -\dfrac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,n-1}}x_1 - \dfrac{a_{n-1,2}}{a_{n-1,n-1}}x_2 - \cdots - \dfrac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}x_n + \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}} \\ x_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_n + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases} \tag{3}$$

Введем обозначения:

$$q_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}},\ q_{13} = -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \cdots,\ q_{1n} = -\frac{a_{1n}}{a_{11}},\ f_1 = -\frac{b_1}{a_{11}}, \cdots$$

Тогда из системы (3) получим:

$$\begin{cases} x_1 = q_{12}x_2 + q_{13}x_3 + \cdots + q_{1n}x_n + f_1 \\ x_2 = q_{21}x_1 + q_{23}x_3 + \cdots + q_{2n}x_n + f_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \cdots + q_{n,n-1}x_{n-1} + f_n \end{cases} . \tag{4}$$

Заметим, что $q_{11} = q_{22} = \cdots = q_{nn} = 0$.

Запись (4) представляет собой канонический вид скалярной записи системы (1).

Введем матрицу Q,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1,\,n-1} & q_{1n} \\ q_{21} & 0 & q_{23} & \cdots & q_{2,\,n-1} & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{n,\,n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

а также вектор–столбцы X и F:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (4) может быть записана в виде

$X = QX + F$,

который представляет собой канонический вид матричной записи системы (4).

Пример 2. Рассмотрим систему (1). Перенесем левые части уравнений в правые:

$$\begin{cases} 0 = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1 \\ 0 = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ 0 = -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn}x_n + b_n \end{cases}. \tag{5}$$

К обеим частям уравнений системы (5) прибавим, соответственно, $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1 = (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ x_n = -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n + b_n \end{cases}. \tag{6}$$

Введем обозначения:

$q_{11} = 1 - a_{11}$, $q_{12} = -a_{12}, \cdots$, $q_{1n} = -a_{1n}$, $f_1 = b_1, \cdots$

Тогда из системы (6) получим:

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \cdots + q_{1n}x_n + f_1 \\ x_2 = q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \cdots + q_{2n}x_n + f_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ x_n = q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \cdots + q_{nn}x_n + f_n \end{cases}. \tag{7}$$

Введем матрицу Q, вектор–столбцы X и F:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (7) в матричной записи будет иметь канонический вид:

$X = QX + F$.

3. Метод простых итераций

А) Рассмотрим систему уравнений, записанную в скалярном виде:

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \cdots + q_{1n}x_n + f_1 \\ x_2 = q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \cdots + q_{2n}x_n + f_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ x_n = q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \cdots + q_{nn}x_n + f_n \end{cases}. \tag{8}$$

Возьмем в качестве начального (нулевого) приближения произвольные значения $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n$ и подставим эти значения в правые части уравнений системы (8). Тогда получим новые значения переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n$ – первое приближение $x_1^1, x_2^1, \cdots, x_n^1$. Подставляя первое приближение в правые части уравнений системы (8), получим второе приближение $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2$. Продолжая процесс, можно получить приближение $x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k$ k–ого порядка, причем k может принимать любые целые значения. В результате получим n штук числовых последовательностей:

$$
\begin{aligned}
&x_1^0, x_1^1, x_1^2, \cdots, x_1^k, \cdots \\
&x_2^0, x_2^1, x_2^2, \cdots, x_2^k, \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&x_n^0, x_n^1, x_n^2, \cdots, x_n^k, \cdots
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Если последовательности (9) сходятся, то их пределы являются точным решением системы (8) (следовательно, и системы (1)). Для нахождения приближенного решения с заданной точностью достаточно совершить конечное число итераций.

Б) Рассмотрим систему уравнений, записанную в матричном виде:

$$X = QX + F. \qquad (10)$$

Используя в качестве начального (нулевого) приближения произвольный вектор–столбец

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \cdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

и подставляя его в правую часть системы (10), получаем вектор–столбец первого приближения:

$$X_1 = QX_0 + F.$$

Поступая аналогичным образом с X_1, получим X_2 и т.д. Если $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = X$, то вектор–столбец X и будет точным решением системы (10) (следовательно, и системы (2)).

Заметим, что процессы, описанные в пунктах А) и Б), тождественны, только в пункте А) мы имеем дело со скалярной записью, а в пункте Б) – с матричной записью исходной системы линейных алгебраических уравнений.

4. Примеры неудачного и удачного приведения системы к эквивалентному виду

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases},$$

причем $x = \frac{1}{3} = 0.(3)$, $y = \frac{1}{3} = 0.(3)$ – точное решение системы.

Пример 1. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x = -2y + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}.$$

Записав решение системы в виде вектор–столбца $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и приняв в качестве нулевого приближения вектор–столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, в результате применения метода простых итераций получим последовательность вектор–столбцов:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -21 \\ -21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 43 \\ 43 \end{pmatrix}, \ldots$$

Очевидно, что указанная последовательность расходится и, следовательно, реализация метода простых итераций не приведет к нахождению приближенного решения системы.

Пример 2. Перепишем ту же систему в виде

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Приняв в качестве нулевого приближения вектор–столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, получим последовательность вектор–столбцов:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0.25\\0.25\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0.375\\0.375\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0.313\ldots\\0.313\ldots\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0.344\ldots\\0.344\ldots\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0.328\ldots\\0.328\ldots\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0.336\ldots\\0.336\ldots\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0.332\ldots\\0.332\ldots\end{pmatrix},\ldots$$

В результате выполнения восьми итераций получаем приближенное решение $\begin{pmatrix}0.332\ldots\\0.332\ldots\end{pmatrix}$, которое отличается от точного решения $\begin{pmatrix}0.(3)\\0.(3)\end{pmatrix}$ на 0.001.

5. Достаточные условия сходимости метода простых итераций

Рассмотрим систему (8)

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \cdots + q_{1n}x_n + f_1 \\ x_2 = q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \cdots + q_{2n}x_n + f_2 \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ x_n = q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \cdots + q_{nn}x_n + f_n \end{cases},$$

которая получена из системы (1) и ей эквивалентна.

Доказано, что достаточным признаком сходимости метода простых итераций является выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} &|q_{11}| + |q_{12}| + \cdots + |q_{1n}| < 1, \\ &|q_{21}| + |q_{22}| + \cdots + |q_{2n}| < 1, \\ &\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ &|q_{n1}| + |q_{n2}| + \cdots + |q_{nn}| < 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим с точки зрения выполнения достаточных условий (11) примеры из предыдущего пункта.

Пример 1. В первом примере $q_{11} = 0$, $q_{12} = -2$, $q_{21} = -2$, $q_{22} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &|q_{11}| + |q_{12}| = |0| + |-2| = 2 > 1, \\ &|q_{21}| + |q_{22}| = |-2| + |0| = 2 > 1. \end{aligned}$$

Достаточные условия (11) сходимости метода простых итераций не выполнены, следовательно, гарантировать сходимость итерационного процесса невозможно, что и продемонстрировано в примере 1.

Пример 2. Во втором примере $q_{11}=0$, $q_{12}=-\frac{1}{2}$, $q_{21}=-\frac{1}{2}$, $q_{22}=0$.

Тогда

$$|q_{11}|+|q_{12}|=|0|+\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1,$$

$$|q_{21}|+|q_{22}|=\left|-\frac{1}{2}\right|+|0|=\frac{1}{2}<1.$$

Достаточные условия (11) сходимости выполнены, следовательно, гарантирована сходимость итерационного процесса, что и продемонстрировано в примере 2, причем решение системы может быть найдено с любой точностью.

6. Варианты задач для выполнения лабораторной работы

В следующих заданиях матрица A из коэффициентов при неизвестных системы (1) получается в результате сложения матриц D и kC, где k – параметр, принимающий заданные значения:

$A = D + kC.$

Задание. Решить методом простых итераций систему уравнений (1), преобразовав ее к виду (4) таким образом, чтобы удовлетворялись достаточные условия (10) сходимости метода.

1) $D=\begin{pmatrix} 6.214 & 2.180 & 3.184 \\ -1.351 & 8.224 & 5.224 \\ 2.489 & -0.459 & 4.299 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 49.91 \\ 50.17 \\ 32.68 \end{pmatrix}$;

$k = 0; 0.5; 1; 1.5; \ldots; 7.5.$

2) $D=\begin{pmatrix} 6.22 & 1.42 & -1.72 & 1.91 \\ 1.44 & 5.33 & 1.11 & -1.82 \\ -1.72 & 1.11 & 5.24 & 1.42 \\ 1.91 & -1.82 & 1.42 & 6.55 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 7.53 \\ 6.06 \\ 8.05 \\ 8.06 \end{pmatrix}$;

$k = 0; 1; 2; \ldots; 15.$

$$3)\ D=\begin{pmatrix} 6.2 & 0.1 & 0.3 & 0.4 & -0.5 \\ 0.5 & 5.4 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 6.3 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.4 & 5.3 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 6.2 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.4 \\ -0.3 \\ 1.1 \\ -0.1 \end{pmatrix};$$

$k = 0; 1; 2; \ldots; 15.$

$$4)\ D=\begin{pmatrix} 4.324 & 0.625 & 0.541 & 0.932 & -0.244 & 0.877 \\ 0.774 & 4.562 & 0.423 & 0.392 & 0.442 & 0.787 \\ 0 & -0.256 & 3.732 & 0.623 & 0.562 & 0.326 \\ 0 & 0 & -0.265 & 4.570 & 0.351 & -0.237 \\ 0.425 & 0.721 & 0 & 0.725 & 4.831 & 0.675 \\ 0 & 0.172 & 0.392 & -0.413 & 0.385 & 4.565 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} -0.272 \\ 0.746 \\ -0.029 \\ 0.542 \\ 0.375 \\ 0.586 \end{pmatrix};$$

$k = 0; 1; 2; \ldots; 15.$