МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Вычислительная математика»

Н.Н. БРУШЛИНСКАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ:
проверка противоречивости постулатов на примерах механики твердого тела

Методические указания к практическим занятиям

по дисциплине
«Высшая математика»

МОСКВА – 2008

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)

Кафедра «Вычислительная математика»

Н.Н. Брушлинская

ЭЛЕМЕНТЫ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ: ПРОВЕРКА ПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ПОСТУЛАТОВ НА ПРИМЕРАХ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета
в качестве методических указаний

для студентов всех специальностей

Москва - 2008

УДК 519.6
Б 89

Брушлинская Н.Н. Элементы формальной логики: проверка противоречивости постулатов на примерах механики твердого тела. Методические указания к практическим занятиям. - М.: МИИТ, 2008. –10с.

В предлагаемых методических указаниях рассматриваются законы формальной логики; каждый закон и его нарушение иллюстрируются примерами из логических построений механики твердого тела.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

Традиционная логика с античных времен констатирует существование трех законов:
- закон тождества,
- закон непротиворечия,
- закон исключенного третьего.

Лейбниц счел необходимым добавить к этим законам логики закон достаточного основания.

В современной математической логике в качестве нормативных законов соблюдаются только:
- закон исключенного третьего,
- закон непротиворечия,
- закон двойного отрицания.

Закон тождества и закон достаточного основания при построении формальных исчислений математической логики – не используются.

Однако математические методы механики содержат достаточно сложные объекты, чтобы в этих методах проявлялись закон тождества и закон достаточного основания.

ЗАКОН ТОЖДЕСТВА

В естественных языках одно и то же слово может обладать различными значениями. (Например, коса – орудие для покоса, коса (волос)).

Такие слова называются омонимами. Аналогичное явление омонимии наблюдается и в математических методах механики.

Аристотель писал, что «нельзя ничего мыслить, если каждый раз не мыслить что-нибудь одно».

Когда Ньютон открыл такой объект как дифференциальные уравнения, он сопроводил это открытие такой формулировкой: «Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa».

В этой формулировке слова «fluentes» и «fluxiones» уже имели устоявшиеся значения. (До сих пор, например, во французском языке слово «fluent» - означает «сочащийся», а слово «fluxion» означает «воспалительный процесс» и «calcul des fluxiones» - дифференциальное исчисление).

Ньютон сам присвоил словам «fluent» и «fluxions» их математические значения.

Формулировка Ньютона может быть расшифрована двояко:

- дифференциальные уравнения механики – это уравнения, содержащие неизвестные функции и их производные;
- дифференциальные уравнения механики определяют логические структуры, описывающие «запутанные течения и искусные изъяны».

Чтобы вычислить логическую структуру, определяемую дифференциальными уравнениями задачи о движении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой, необходимо проверить непротиворечивость двух постулатов теории твердого тела:

1. постулата о неизменности расстояний между точками движущегося тела;
2. постулата о структуре траектории каждой точки движущегося твердого тела.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ПОСТУЛАТОВ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Постулаты механики твердого тела содержат следующие аксиомы:

1. Определение твердого тела как системы точек, расстояние между которыми не меняется при движении.
2. Положение твердого тела определяется шестью параметрами.
3. Определение движения твердого тела как гладко зависящего от времени отображения подвижного 3-х мерного линейного евклидова пространства в неподвижное, при этом отображение сохраняет метрику и ориентацию. [1]
4. Определение « Произвольного бесконечно малого перемещения твердого тела как суммы двух частей. Одна из них есть бесконечно малый параллельный перенос тела, в результате которого центр инерции переходит из начального положения в конечное при неизменной ориентации осей подвижной системы координат. Вторая – бесконечно малый поворот вокруг центра инерции в результате которого «тело приходит в конечное положение» [2].

Из этого четвертого постулата выводится следствие, что якобы всем точкам движущегося твердого тела в один и тот же момент времени можно приписать одну и ту же угловую скорость как реальное свойство движущегося тела. Из настоящей угловой скорости выводится существование функций Лагранжа и Гамильтона.

Однако требование сохранения метрики движущимся телом настолько жесткое, что само порождает совершенно другой результат: в начальный момент времени движения твердого тела в каждой точке тела возникает, вообще говоря, своя угловая скорость, зависящая от большого числа параметров.

При этом в определенных точках тела в важном случае движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой угловая скорость в начальный момент движения тела обращается в бесконечность.

Теорема 1. Из определения твердого тела как системы точек, расстояния между которыми не меняются при движении, вытекает структура траектории движения каждой отдельной точки твердого тела, а также структура траекторий некоторой окрестности каждой точки.

Доказательство. Пусть твердое тело движется относительно евклидовой 3-мерной системы координат E^3.

Фиксируем точку P твердого тела и некоторую окрестность U_p этой точки. Пусть $r_p(x_p, y_p, z_p)$ - радиус – вектор точки P в системе k.

Пусть при движении твердого тела (ТТ) кривая $r_p(S)$ имеет хотя бы три производных по S, где S - достаточно малая длина дуги кривой $r_p(S)$. Тогда

$$r_p(S) r_p(0) + \frac{\dot{r}_p(0)}{1!} S + \frac{\ddot{r}_p(0)}{2!} S^2 + \frac{\dddot{r}_p(0)}{3!} S^3 + \ldots$$

Рассмотрим движущуюся евклидову 3-мерную систему координат E^3 с началом в точке $r_p(S)$ и базисом

$$e_1(S)=\dot{r};\ e_2(S)=\frac{\ddot{r}}{|\ddot{r}|},\ e_3(S)=\frac{[\dot{r},\ddot{r}]}{|\ddot{r}|}.$$

Как известно, векторы $e_1(S)$, $e_2(S)$ и $e_3(S)$ удовлетворяют дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} \dot{e}_1=[\omega,e_1], \\ \dot{e}_2=[\omega,e_2], \\ \dot{e}_3=[\omega,e_3]; \end{cases} \quad (1)$$

где $\omega=\kappa e_1+ke_3=\dfrac{(\dot{r},\ddot{r},\dddot{r})}{\ddot{r}^2}e_1+|\ddot{r}|e_3$ (2)

[(,,) – символ смешанного произведения, [,] – символ векторного произведения.]

Траектория любой точки $Q\in \mathrm{U}_p$ имеет вид $r_Q(S)=r_p(S)+Xe_1(S)+Ye_2(S)+Ze_3(S)$, где X, Y, Z - координаты точки $Q\in \mathrm{U}_p$ в системе E^3 с базисом $e_1(S)$, $e_2(S)$, $e_3(S)$, причем X, Y, Z от S не зависят из-за неизменности расстояний между точками движущегося тела.

Обратная теорема 2.

Знание решения дифференциальных уравнений (1) $e_1(S)$, $e_2(S)$, $e_3(S)$ позволяет получить траекторию точки P

$$\mathrm{r}_p(S) = r_p(0) + e_1 S + \frac{1}{2} e_2 |\ddot{r}| S^2 +$$

$$+ \frac{S^3}{3!}\left[-|\ddot{r}|^2 e_1 + \left(|\ddot{r}|\right)'_S e_2 + |\ddot{r}| \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{(\ddot{r})^2} e_3 \right] + \ldots$$

В случае движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой вектор угловой скорости ω (2) задается двумя функциями, зависящими от 15 параметров задачи. Обозначим это пространство параметров через $\mathrm{E}^{(15)}$,

В этом пространстве $\mathrm{E}^{(15)}$ имеется семейство поверхностей коразмерность 3, в точках которых вектор ω обращается в бесконечность.

Множество векторов ω возникает в начальный момент. Вектор ω существенно зависит от точки P. Влияние переменного вектора ω на траекторию точки P является определяющим.

Литература.

[1] В.И. Арнольд, Математические методы классической механики, Москва, «Наука», 1974.

[2] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Механика, Москва, «Наука», 1965.

The proof of the inconsistency of postulates solid body's mechanics and real laws of points' trajectory of solid body.

Учебно-методическое издание

Брушлинская Надежда Николаевна

Элементы формальной логики: проверка противоречивости постулатов на примерах механики твердого тела.

Методические указания
к практическим занятиям
по дисциплине
«Высшая математика»