

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Машиноведение, проектирование,
стандартизация и сертификация»

В.Д. ГВОЗДЕВ

ПРИКЛАДНАЯ МЕТРОЛОГИЯ: ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

По дисциплине
«МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ И СЕРТИФИКАЦИЯ»

МОСКВА - 2011

УДК 006.91

Г-25

Гвоздев В.Д. Прикладная метрология: Точность измерений. Учебное пособие. - М.: МИИТ, 2011. – 72 с.- Ред. 2014 г.

Рассматриваются вопросы выбора средств измерений, установления допустимой погрешности измерений, оценки и обеспечения точности результатов измерений.

Для студентов высших учебных заведений, изучающих дисциплину «Метрология, стандартизация и сертификация».

Рецензенты: д.т.н., профессор Петров Г.И.
МИИТ
к.т.н., с.н.с. Брянцев В.А.
ООО «Спецэнергоснаб»

© ФГБ ОУ ВПО «Московский
государственный университет
путей сообщения», 2011

Св. план 2011 г., поз. ____

Гвоздев Владимир Дмитриевич

Прикладная метрология: Точность измерений

Учебное пособие

Подписано к печати -

Усл. – п.л. -

Заказ

Формат 60x84/16.

Тираж - 100 экз.

150048, Ярославль, Московский пр., д. 151
Типография Ярославского ж.д. техникума – филиала МИИТ

1. Определение допустимой погрешности (расширенной неопределенности) измерений.

Качество решения измерительной задачи главным образом определяется точностью результата измерений. Для того, чтобы результат измерения мог быть принят за действительное значение величины, *погрешность Δ (расширенная неопределенность U) результата измерения не должна превосходить допустимую погрешность $[\Delta]$ (расширенную неопределенность $[U]$) измерения.* (Далее в тексте используется только термин допустимая погрешность). То есть, должно выполняться условие

$$\Delta \leq [\Delta] \text{ или } U \leq [U]. \quad (1)$$

Допустимая погрешность измерений (точность измерений) во многих случаях (например, при оценке качества продукции, параметров технологических процессов, при осуществлении торговых операций и процедур контроля) *регламентируется стандартами* (в частности, стандартами на методы контроля и испытаний) или техническими условиями. Например, ГОСТ 8.051 устанавливает допустимые погрешности измерений линейных и угловых размеров. В теплоэнергетике применяют РД 34.11.321-96 «Нормы точности измерений технологических параметров тепловых электростанций». В ГОСТ 8.549-2004 «ГСИ. Масса нефти и нефтепродуктов» приведены пределы допускаемой относительной погрешности измерений массы. ГОСТ 30247.0-2002 «Конструкции строительные. Методы испытания на огнестойкость» устанавливает допустимые погрешности измерения температуры и давления.

В общем случае, выбор значения допустимой (допускаемой) погрешности производят исходя из задач измерений.

Задачи могут быть разные. Разделим их условно на две группы: 1 - получение информации о величине и 2 - контроль качества объектов.

В первом случае значения допустимой погрешности измерений обусловлены влиянием неопределенности результата измерений на последствия от принятия решения на его основе.

Например:

-если ставится задача повышения точности оценки какой-либо количественной характеристики по отношению к уже достигнутому уровню, допустимая погрешность измерения будет определяться разрядом последней цифры, надежность которой должна быть обеспечена;

-для научных и практических исследований, во многих случаях, допустимую погрешность измерений устанавливают из условия сопоставимости их результатов;

-в медицине точность измерений обуславливается взаимосвязью между изменением параметра и самочувствием пациента;

-в спорте выбор разрешающей способности средств измерений и погрешности измерений связаны с плотностью результатов спортсменов;

-при осуществлении торговых операций с продуктами, характеризуемыми массой или объемом, поставке электроэнергии, тепла, горючих и смазочных материалов и др. от значения допустимой погрешности измерений напрямую зависят экономические показатели поставщика и потребителя;

-при оценке характеристик точности технологических процессов, применении статистических методов контроля технологических процессов, статистическом приемочном контроле и входном контроле качества продукции исходят из критерия ничтожной погрешности измерения по отношению к технологическому допуску. Характеристики точности измерений принимают такими, чтобы среднеквадратическое отклонение (СКО) результата измерений было в 5...6 раз меньше СКО контролируемого параметра. Если СКО контролируемого параметра неизвестно, руководствуются правилом: цена деления средства измерений не должна превышать $1/6$ значения допуска контролируемого параметра. Погрешность измерения в этом случае рассматривают как составную часть погрешности изготовления.

При установлении требований к качеству объектов для значений показателей качества задают односторонние ограничения

или двухсторонние ограничения (допуски), которые учитывают при выборе допустимой погрешности измерения.

Определим место погрешности измерения при контроле показателя качества с двухсторонним ограничением, то есть, когда задан допуск.

Обратимся к положению, записанному в стандарте ГОСТ Р ИСО 10576-1-2006 [1]: «решение о соответствии требованиям может быть принято в том случае, если интервал неопределенности результатов измерений находится внутри области допустимых значений». Реализуя принципы оценки соответствия, установленные стандартом, изобразим на числовой оси (рис.1) области соответствия (контролируемый параметр A однозначно находится в заданных пределах) и несоответствия (контролируемый параметр A однозначно находится вне заданных пределов).

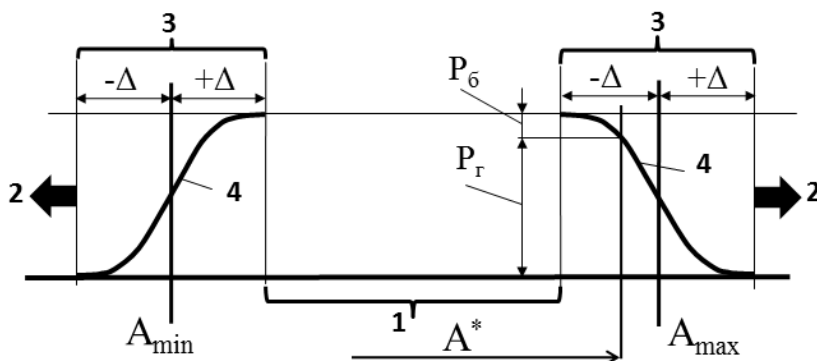


Рис.1. Схема измерительного контроля качества отдельного объекта.

Область соответствия 1 определена условием $A_{\min} + \Delta \leq A_{и} \leq A_{\max} - \Delta$, области несоответствия 2 (области недопустимых значений) характеризуются неравенствами $A_{и} \leq A_{\min} - \Delta$ и $A_{и} \geq A_{\max} + \Delta$. Интервалы $A_{\min} \pm \Delta$ и $A_{\max} \pm \Delta$ назовем областями неокончательного результата оценки соответствия 3. Если истинное значение измеряемой величины находится в области неокончательной оценки соответствия, то существует вероятность, что вследствие влияния погрешности измерений годное изделие может быть отнесено к бракованным (неправильно забракованное

изделие), а бракованное изделие к годным (неправильно принятое изделие).

Действительное значение показателя качества равно

$$A_d = A_i \pm \Delta.$$

При $A_i \approx A_{\max}$ можем иметь два частных случая

$$A_i > A_{\max} \text{ и } A_d = A_i - \Delta \leq A_{\max} ; \quad (2)$$

$$A_i < A_{\max} \text{ и } A_d = A_i + \Delta > A_{\max} , \quad (3)$$

где A_{\max} - наибольшее допустимое значение показателя качества.

В первом случае истинное значение A_i показателя качества превышает наибольшее допустимое значение, но действительное значение, вследствие проявления погрешности измерения со знаком минус, меньше наибольшего допустимого значения и изделие будет отнесено к годным изделиям (*неправильно принятое изделие*). Во втором случае при $A_i < A_{\max}$ погрешность измерения проявляется со знаком плюс и годное изделие будет отнесено к бракованным изделиям (*неправильно забракованное изделие*). Аналогичные рассуждения можно провести и применительно к изделиям, значения показателей качества которых находятся вблизи наименьшего допустимого значения.

Количество неправильно забракованных изделий будет определять убытки у производителя и, в некоторых случаях, может быть уменьшено повторным измерением. Влияние неправильно принятых изделий проявится у потребителей через снижение эксплуатационных показателей и преждевременные отказы. Это приведет к издержкам у производителя, связанным с обеспечением гарантийного ремонта и сервисного обслуживания, снижению доверия к нему потребителей, уменьшению конкурентоспособности продукции.

При известной функции распределения 4 (рис. 1) погрешности измерений можно установить вероятности правильного и неверного решений о соответствии **конкретного изделия**. Применительно к ситуации, показанной на рисунке, если A^* истинное значение величины, то P_r - вероятность признания изделия годным, а $P_b = 1 - P_r$ - вероятность забракования изделия. Если A^* измеренное значение, то P_r - вероятность того, что изделие годное, а P_b - вероятность, что оно бракованное. Достоверность такой

информации не высока: сведения о законе распределения случайной погрешности измерений приблизительно или отсутствуют; неисключенные систематические погрешности, рассматриваемые при вычислении суммарной погрешности как случайные величины, в практических измерениях проявляют себя как систематические составляющие, значения и знаки которых неизвестны.

В стандарте ГОСТ Р ИСО 10576-1-2006 не приведены правила для ситуации, когда получен неокончательный результат оценки соответствия. В тоже время отмечается, что «применение двухэтапной процедуры вместо одноэтапной процедуры в общем случае приводит к уменьшению риска» принятия ошибочных решений. Двухэтапная процедура подразумевает повторное выполнение измерений, когда границы интервала неопределенности, рассчитанные после первого этапа, выходят за пределы поля допуска (т.е. результат измерений находится в области неокончательного результата оценки соответствия). Значение измеряемой величины и её неопределенность устанавливают как комбинацию результатов измерений двух этапов. Положительный эффект возможен в случае, если доминирует *случайная составляющая погрешности измерений*.

Для сближения границ области неокончательного результата оценки соответствия применимы меры по уменьшению погрешности измерений, рассмотренные ниже в разделе 4.

Границы области соответствия сужаются до нуля при допустимой погрешности измерения равной 0,5 допуска на изготовление и расширяются до границ поля допуска при отсутствии погрешности измерений. Отсюда следует вывод, что ***значение погрешности измерений при двухстороннем ограничении на значение показателя качества должно быть менее половины значения допуска и чем оно меньше, тем лучше.***

В нормативных документах и печатных изданиях [2, 18, 33, 34 и др.] по метрологии приводятся указания по выбору допустимой погрешности измерений исходя из допуска на изготовление, которые якобы позволяют «достичь необходимой точности изделий с наименьшими затратами труда и материальных средств».

Особенностью перечисленных рекомендаций является то, что они не позволяют связать выбор допустимой погрешности измерений с конкретными последствиями от их использования.

Рекомендации справедливы, но *не безусловны* и требуют проверки эффективности в каждом конкретном случае.

Ограничения на значения показателей качества могут быть односторонними: только сверху или только снизу. Это не значит, что второе ограничение в принципе отсутствует. Например, для отгрузки сырой нефти требования к массовой доле серы могут быть заданы в виде: массовая доля серы должна быть не более 2 %. Вторая - нижняя граница реальна и объективна – 0%. В этом случае разность граничных значений можно рассматривать как допуск. Поскольку область соответствия при оценке качества будет начинаться с нуля, значение допустимой погрешности измерения выбираем из условия $[\Delta] < TA$. Другой пример, требование к продукту сформулировано в виде: массовая доля компонента А (предположим, жирность молока) должна быть не менее 3,2 %. Задана нижняя граница. Объективно существует и верхняя граница 100%. Однако связывать значение допустимой погрешности измерения с диапазоном 3,2...100% опрометчиво. Для удовлетворения заданных требований здесь уместен экономический подход к выбору метода и средств измерений в сочетании с введением приемочной границы (границы соответствия), смещенной на значение Δ (в последнем случае в сторону увеличения).

Экономический подход к выбору метода и средств измерений описан в нескольких нормативных документах (например, [33, 34]).

Идея заключается в следующем: «оптимальной (в экономическом отношении и для задач, не связанных с негативными социальными последствиями, например, такими, как причинение ущерба здоровью работников) считают точность измерений, при которой сумма потерь (добавим, или дополнительных затрат) от недостаточной точности результатов измерений и расходов на измерения будет минимальной».

Экономические расчеты – основной способ доказательства обоснованности выбора значения допустимой погрешности

измерений или метода и средств измерений при контроле качества объектов. Однако они могут быть применены только для конкретных, подробно описанных ситуаций.

Значение допустимой погрешности измерений может быть прописано в документах на поставку продукции.

Требования к точности измерений задают в виде пределов допустимых значений характеристик абсолютной или относительной погрешностей измерений.

Наиболее распространенным способом выражения требований к точности измерений являются границы допустимого интервала, в котором с заданной вероятностью P должна находиться погрешность измерений.

Если границы симметричны, то перед их одним числовым значением ставят знаки плюс-минус.

Способы выражения требований к точности измерений в зависимости от использования результатов измерений приведены в правилах ПМГ 96 – 2009 «ГСИ. Результаты и характеристики качества измерений. Формы представления» [10] (см. раздел 3.9).

2. Выбор метода и средств измерений

Выбор метода и средств измерений представляет собой многовариантную задачу. Ее рациональное решение соответствует минимальным затратам на измерения, включая затраты на метрологическое обслуживание средств измерений, при условии выполнения заданных требований к точности измерений.

Задача выбора средств и метода измерений, как правило, не решается с «чистого листа». В различных областях человеческой деятельности накоплен богатый опыт измерений. Остается только, применив методы прецедентов или аналогов, адаптировать этот опыт к конкретному случаю.

Обычно эту задачу решают итерационным путем. Предварительно выбирают метод и средства измерений, которые могут быть применены в заданных условиях и удовлетворяют заданным эксплуатационным, эргономическим и другим

требованиям. Далее проводят оценивание погрешности (неопределенности) измерений.

Исходными данными для выбора метода и средств измерений по **метрологическим характеристикам** являются:

описание (спецификация) измеряемой величины, диапазона ее возможных значений, наибольшей возможной частоты (скорости) ее изменения;

характеристики внешних условий проведения измерений, режимов работы и свойств объектов измерений, способных влиять на погрешности измерений;

пределы допустимых значений характеристик погрешности (неопределенности) измерений (вместо указанных характеристик могут быть указаны предельные значения количества неправильно принятых и неправильно забракованных изделий – брака первого и второго рода).

Особое внимание должно быть уделено полноте спецификации измеряемой величины: *измеряемую величину следует определить с достаточной полнотой по отношению к требуемой точности.* Например, если длину стального стержня с номинальным значением 1 м необходимо измерить с точностью до микрометра, то его спецификация должна включать температуру и давление. Определение измеряемой величины может быть представлено так: длина стержня при температуре 25,00 °С и давлении 101325 Па (плюс любые другие определяющие параметры, которые считают необходимыми, такие как способ, с помощью которого этот стержень поддерживается). Однако если длина должна быть измерена с точностью до миллиметра, указание температуры или давления не требуется.

К дополнительной информации, определяющей **эксплуатационные свойства** средств измерений, относятся требования к:

быстроте получения измерительной информации (производительности процесса измерений);

форме представления результата измерения (аналоговая или цифровая форма);

способу регистрации измерительной информации;

необходимости хранения, обработки измерительной информации и передачи её на расстояние;

уровню мобильности средств измерений (переносные СИ или стационарные);

условиям размещения СИ (на объекте измерения, щитовые, настольные) и их весогабаритным характеристикам;

уровню автоматизации процесса измерений;

надёжности (в первую очередь к метрологической надёжности) СИ и другие.

При необходимости, приводят описание объекта измерений и его технические характеристики (например, масса, габариты, место нахождения измеряемой величины и др.).

Исходная информация может существенно ограничить круг методов и СИ, применимых для рассматриваемой измерительной задачи. При отсутствии исходных предпочтений выбирают серийно выпускаемые СИ, утвержденных типов, и метод непосредственной оценки.

Для удовлетворения требований к точности измерений погрешность намечаемого к использованию СИ следует ограничить условием, например, $\Delta_{СИ} \approx (0,2 \dots 0,5) \cdot [\Delta]$. Необходимость такого ограничения обусловлена влиянием на результат измерения методических и субъективных погрешностей, а также изменением метрологических характеристик СИ при эксплуатации (создается запас метрологической надёжности).

В случае, если возможно применение нескольких разных типов СИ, принимают во внимание затраты на их приобретение, монтаж, эксплуатацию, техническое обслуживание, ремонт и утилизацию.

Если удовлетворить заданные требования в полной мере не возможно, принимают решение о разработке новых средств измерений.

Иногда задача выбора метода и средств измерений существенно упрощается, поскольку её решение можно найти в нормативно – технических документах. Так, в машиностроении действует руководящий документ РД 50-98-86 «Выбор универсальных средств измерений линейных размеров до 500 мм (по применению ГОСТ 8.051-81)».

Для намеченных метода и средства измерений устанавливают характеристики погрешности (неопределенности) результата измерений.

3. Оценка погрешности (неопределенности) результата однократного измерения.

Выполнение однократных измерений обосновывают следующими факторами:

- производственной необходимостью (разрушение образца, невозможность повторения измерения, экономическая целесообразность и т.д.);

- возможностью пренебрежения случайными погрешностями;

- случайные погрешности существенны, но доверительные границы погрешности результата измерения не выходят за границы допустимой погрешности измерений.

Для определения погрешности (неопределенности) измерения на стадии выбора метода и средств измерений используют расчетные, экспериментальные или расчетно-экспериментальные методы.

Расчетные методы оценивания погрешности (неопределенности) измерений применяют в тех случаях, когда нет условий для реализации экспериментальных методов. Они также предпочтительны при наличии исходной информации, достаточной для получения результатов расчета с необходимой точностью.

Экспериментальные методы оценивания погрешности (неопределенности) измерений могут быть применены при выполнении следующих условий:

- наличие средств измерений величины, погрешность которых можно считать несущественной в реальных условиях эксперимента по оцениванию погрешности измерений;

- возможность создать все существенные комбинации внешних влияющих величин и значений самой измеряемой величины, определенные заданными условиями измерений.

В результате эксперимента получают «статистические оценки» погрешности (неопределенности) измерений или ее составляющих,

относящиеся к конкретным объекту измерений, экземплярам средств измерений, значениям влияющих величин и т.п.

Прямое экспериментальное оценивание погрешности (неопределенности) измерений в реальных (производственных) условиях измерений, как правило, неосуществимо, например, из-за отсутствия средств измерений необходимой точности, способных работать в этих условиях, и других ограничений. В производственных условиях экспериментальным способом можно оценить погрешность (неопределенности) лишь части измерительного канала, т.е. некоторые составляющие погрешности измерений.

Следует принять во внимание, что экспериментальное оценивание дает приближенные результаты из-за невозможности полностью выполнить приведенные выше условия.

Наиболее рациональным подходом оценивания погрешности (неопределенности) измерений является расчетно-экспериментальный метод.

Алгоритм расчетно-экспериментального оценивания приведен в РМГ 62-2003 «Рекомендации по межгосударственной стандартизации ГСИ. Обеспечение эффективности измерений при управлении технологическими процессами. Оценивание погрешности измерений при ограниченной исходной информации».

Рассмотрим расчетный метод оценивания погрешности (неопределенности) однократных измерений.

Оценку *возможного* отклонения экспериментального значения величины от истинного значения производят на основании априорной информации о величинах, входящих в правую часть формулы

$$\Delta = \Delta_{\text{СИ}} + \Delta_{\text{М}} + \Delta_{\text{Л}} \quad (4)$$

Исходной информацией для выполнения вычислений являются данные об измеряемой величине, условиях измерения и источниках погрешности измерения, характеристики предварительно намеченного средства измерений (одного или нескольких), другая информация отмеченная выше.

Инструментальную составляющую погрешности $\Delta_{\text{СИ}}$ вычисляют на основе нормируемых метрологических

характеристик средств измерений. Наличие методической составляющей погрешности Δ_M устанавливаются на основе анализа обстоятельств, обусловленных влиянием:

- изменения параметров функции преобразования;
- способов применения средств измерений;
- других факторов, не связанных со свойствами используемых средств измерений;
- взаимодействия средства измерений с объектом измерения или средств измерений между собой и др.

Источником методической погрешности (неопределенности) может быть неполная реализация спецификации измеряемой величины. (Причины возникновения методической погрешности были приведены в разделе 1.4 [8]).

Характеристики личной погрешности Δ_L определяют на основе нормированной номинальной цены деления шкалы измерительного прибора (или диаграммной бумаги регистрирующего прибора) выбранного типа с учетом способности «среднего» оператора к интерполяции в пределах деления шкалы. По разным оценкам [9, 16, 28] значение личной погрешности составляет 0,2...0,3 (не более 0,5) цены деления шкалы прибора.

Алгебраическую сумму величин, входящих в формулу (4), называют *пределом погрешности* измерений, а применительно к результату измерений пределом расширенной неопределенности. Алгебраическое суммирование дает завышенную оценку и может явиться причиной невыполнения неравенства (1).

Рекомендации Р 50.2.038 – 2004 «ГСИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешности и неопределённости результата измерений» предлагают суммировать составляющие погрешности измерений как случайные величины.

Для вычисления характеристик результата измерений Рекомендации предусматривают два подхода: традиционный, предусмотренный нормативными документами РФ по метрологии и европейский, приведенный в «Руководстве по выражению неопределенности измерений» [24]. Традиционный подход основан на понятии погрешность измерений, европейский подход базируется на понятии неопределенность измерений.

Согласно ГОСТ Р 54500.1 [21] *неопределенность измерения* – неотрицательный параметр, характеризующий рассеяние значений величины, приписываемых измеряемой величине на основании используемой информации.

Оценка погрешности измерений. Исходные данные для вычисления погрешности результата измерений могут быть представлены неисключенными систематическими и случайными погрешностями.

Выявленные систематические погрешности исключают введением поправок и далее о них речь не идет.

К неисключенным систематическим погрешностям (НСП) относят: погрешности средств измерений, применяемых по классам точности; погрешности определения действительных значений метрологических характеристик при калибровке или градуировке; погрешности определения поправок на систематические эффекты; погрешности (неопределенности) коэффициентов или констант, используемых при вычислениях и др.

Неисключенные систематические погрешности рассматривают как случайные величины. Это допущение имеет следующие основания. При применении средств измерений по классам точности, во-первых, значение погрешности конкретного средства измерений в пределах, определяемых классом точности, является случайной величиной. Во-вторых, применительно к диапазону показаний средства измерения, намеченному для использования, значение его погрешности не является константой.

В качестве примера ниже приведены значения поправок к показаниям термометра в нескольких точках шкалы, установленные при калибровке.

Точка шкалы, °C	0	50	60	70	80	90	100
Поправка, °C	+0,05	+0,1	+0,1	+0,1	+0,1	+0,08	-0,05

Для случайных погрешностей, если нет другой информации, принимают нормальный закон распределения [2, 17], для НСП – закон равной вероятности.

Случайные погрешности могут быть заданы среднеквадратическим отклонением S_j или доверительными границами $\pm\varepsilon(P)$, неисключенные систематические погрешности - границами $\pm\Theta_j$ или доверительными границами $\pm\Theta_j(P_j)$.

Неисключенная систематическая составляющая погрешности измерений, в зависимости от способа представления исходных данных, может быть вычислена по формулам

$$\theta(P) = k \sqrt{\sum_{j=1}^m \Theta_j^2} \quad (5)$$

или

$$\theta(P) = k \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\Theta_j^2(P_j)}{k_j^2}} \quad (6)$$

где k, k_j - поправочные коэффициенты, принимаемые равными 1...1,43 в зависимости от доверительных вероятностей P, P_j и числа неисключенных систематических погрешностей m (см. [2]). Для определения доверительных границ погрешности измерения, как правило, принимают вероятность, равную 0,95 ($k=1,1$).

При числе неисключенных систематических погрешностей не более трех возможна ситуация, когда результат вычислений по формулам (5) или (6) окажется больше их алгебраической суммы. В этом случае суммирование НСП осуществляют алгебраически.

Среднеквадратическое отклонение случайной составляющей погрешности измерения будет равно

$$S = \sqrt{\sum_{j=1}^n S_j^2} \quad (7)$$

Здесь n – число суммируемых случайных погрешностей.

Если случайные погрешности представлены доверительными границами, соответствующими разным вероятностям, среднеквадратическое отклонение результата измерения вычисляют по формуле

$$S = \sqrt{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2(P_j)/k_{j,P_j}^2} \quad (8)$$

где k_{j,P_j} – коэффициент, зависящий от вероятности P_j и закона распределения j -ой случайной погрешности.

Доверительные границы случайной составляющей погрешности будут равны

$$\varepsilon(P) = Z_{P/2} \cdot S, \quad (9)$$

где $Z_{P/2}$ – аргумент нормированной функции Лапласа, равной $P/2$. При доверительной вероятности $P = 0,95$ $Z_{0,95/2}$ принимают равным 2, при $P = 0,99$ $Z_{0,99/2} = 2,6$ [17].

Если случайные погрешности представлены доверительными границами $\varepsilon_j(P)$, соответствующими одной и той же вероятности, доверительную границу случайной погрешности результата однократного измерения вычисляют по формуле

$$\varepsilon(P) = \sqrt{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2(P)} \quad (10)$$

Доверительную границу погрешности результата измерений вычисляют по формуле

$$\Delta(P) = K \cdot [\Theta(P) + \varepsilon(P)], \quad (11)$$

где K - коэффициент, значение которого для доверительной вероятности 0,95 равно 0,76; для доверительной вероятности 0,99 значение коэффициента K равно 0,83 [17].

Пример 1. Рассчитать погрешность измерения напряжения показывающим прибором на участке электрической цепи сопротивлением $R = 4$ Ом при доверительной вероятности $P=0,95$.

Априорные данные об исследуемом объекте. Участок электрической цепи представляет собой соединение нескольких резисторов, имеющих стабильное сопротивление. Ток в цепи - постоянный. Измерение выполняют в сухом отапливаемом помещении с температурой воздуха до 30 °С. Напряженность магнитного поля до 400 А/м. Предполагаемое падение напряжения на участке цепи постоянно и не превышает 0,9 В.

Измерительный прибор - вольтметр класса точности 0,5 (приведенная погрешность 0,5 %) с верхней границей диапазона измерений $U_{\text{пр}} = 1,5$ В. Вольтметр имеет магнитный экран. Инструментальная составляющая погрешности определяется основной и дополнительной погрешностями.

Определяем предел допускаемой основной погрешности вольтметра

$$\Delta_0 = \pm \gamma \cdot U_{\text{пр}} / 100 = \pm 0,5 \cdot 1,5 / 100 = \pm 0,0075 \text{ В}$$

Дополнительная погрешность из-за влияния магнитного поля не превышает 1,5 % нормирующего значения прибора $X_N = U_{пр}$ и равна $\Delta_{МП} = \pm (0,015 \cdot 1,5) = \pm 0,0225$ В.

Дополнительная температурная погрешность, обусловленная отклонением температуры от нормальной (20 °С) на 10 °С, не превышает 60 % предела допускаемой основной погрешности:

$$\Delta_T = \pm 60 \Delta_0 / 100 = \pm 0,6 \cdot 0,0075 = \pm 0,0045$$
 В.

Методическая погрешность определяется соотношением между сопротивлением участка цепи R и сопротивлением вольтметра R_V . Сопротивление вольтметра известно: $R_V = 1000$ Ом. При подсоединении вольтметра к цепи исходное напряжение U_x изменится на

$$\Delta_U = - U \cdot R / (R + R_V) = - 0,9 \cdot 4 / (4 + 1000) = - 0,004$$
 В

Оцененная методическая погрешность является систематической составляющей погрешности измерений и должна учитываться в при записи результата измерения в виде поправки +0,004 В.

Находим границы погрешности результата измерения.

Поскольку основная и дополнительные погрешности применяемого средства измерений заданы границами, рассматриваем их как неисключенные систематические погрешности. Вычисляем доверительные границы неисключенной систематической погрешности измерения при доверительной вероятности $P = 0,95$:

$$\theta(P) = \pm k \sqrt{\sum_{j=1}^m \theta_j^2} = \pm k \sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_{МП}^2 + \Delta_T^2}$$

Так как случайные погрешности не заданы, после подстановки получим

$$\Delta(P) = \theta(P) = \pm 1,1 \sqrt{0,0075^2 + 0,0225^2 + 0,0045^2} = \pm 0,027$$
 В

Неопределенности результата измерений.

В случае однократных измерений ни о какой статистической обработке речь не идет, поэтому неопределенности типа А отсутствуют.

Для вычисления стандартной неопределенности по типу В используют ту же информацию, что и для выше рассмотренной погрешности измерений:

- данные предшествующих измерений величин, входящих в уравнение измерения;
- сведения о виде распределения вероятностей;
- данные, основанные на опыте исследователя или общих знаниях о поведении и свойствах соответствующих приборов и материалов;
- неопределенности констант и справочных данных;
- данные поверки, калибровки, сведения изготовителя о СИ и т.п.

Неопределенности этих данных обычно представляют в виде границ отклонения значения величины от её оценки.

Оценки дисперсии $u_B^2(X_i)$ или стандартной неопределенности $u_B(X_i)$, в этом случае, определяют, основываясь на всей доступной информации о возможном распределении отсчетов X_i .

Для удобства обмена информацией оценки $u_B^2(X_i)$ и $u_B(X_i)$ называют соответственно дисперсией типа В и стандартной неопределенностью типа В.

Возможны следующие ситуации, связанные со способом представления исходной информации [24].

1). Информация берется из спецификации изготовителя, свидетельства о поверке, справочника или другого источника, и ее неопределенность определяется как значение кратное стандартному отклонению (среднеквадратическое отклонение). Стандартную неопределенность можно принять равной указанному значению неопределенности, деленному на коэффициент кратности. Оцененная дисперсия $u_B^2(X_i)$ будет равна квадрату этого частного.

Пример 2. В свидетельстве о калибровке указано, что масса m_s эталона из нержавеющей стали с номинальным значением 1 килограмм составляет 1000,000325 г и что «неопределенность этого значения равняется 240 мкг на уровне трех стандартных отклонений». Тогда стандартная неопределенность эталона массы равна $u_B(m_s) = 240/3 = 80$ мкг. Оцененная дисперсия $u_B^2(m_s) = 80^2 = 6400$ мкг².

2). Значение неопределенности ограничено интервалом, имеющим уровень доверия 90%, 95% или 99%. Если не указано другого, то можно предположить, что использовалось нормальное

распределение для вычисления упомянутой неопределенности. Стандартную неопределенность, получают делением приведенной неопределенности на соответствующий коэффициент для нормального распределения. Для указанных выше доверительных уровней они, соответственно, равны: 1,64; 1,96 и 2,58.

Пример 3. Согласно свидетельству о калибровке сопротивление эталонного резистора R_s с номинальным значением 10 Ом равно 10,000742 Ом \pm 129 мкОм при 23⁰ С и уровне доверия 99%. Стандартную неопределенность резистора можно принять как $u_B(R_s) = 129 / 2,58 = 50$ мкОм. Оцененная дисперсия - $u^2_B(R_s) = 50^2 = 2500$ мкОм².

3). Информация состоит в том, что с вероятностью «пятьдесят на пятьдесят» значение входной величины X_i находится в интервале от -а до +а (другими словами, вероятность нахождения X_i в этом интервале составляет 0,5 или 50 %). В предположении, что распределение возможных значений X_i приблизительно нормальное, в качестве наилучшей оценки величины X_i можно принять среднюю точку этого интервала μ . Так как для нормального распределения с ожиданием μ интервал $\mu \pm \sigma/1,48$ охватывает приблизительно 50 процентов распределения, то можно принять $u_B(X_i) = 1,48 \cdot a$.

Пример 4. Станочник, определяющий размеры детали, оценивает, что с вероятностью 0,5 ее длина находится в интервале от 10,07 мм до 10,15 мм ($l = (10,11 \pm 0,04)$ мм). Принимаем $a = 0,04$ мм и нормальное распределение для возможных значений l . Стандартная неопределенность длины составит $u_B(l) = 1,48 \cdot 0,04 = 0,06$ мм и оцененная дисперсия $u^2_B(l) = 0,06^2 = 3,6 \cdot 10^{-3}$ мм².

4). Определены только границы от а до b (верхний и нижний пределы) для X_i и нет конкретных сведений о возможных значениях X , внутри интервала. Можно предположить, что с одинаковой вероятностью X может находиться в любом месте в пределах интервала (равномерное распределение возможных значений). Тогда ожидаемое значение X , является средней точкой интервала $X_i = (a+b) / 2$ с соответствующей дисперсией $u^2_B(X_i) = (b-a)^2 / 12$.

Если $a = -b$, то уравнение принимает вид $u^2_B(X_i) = a^2 / 3$.

Пример 5. Справочник дает значения температурного коэффициента линейного расширения чистой меди при 20°C $\alpha_{20}(\text{Cu}) = 16,52 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ и просто утверждает, что «погрешность этого значения не должна превышать $0,40 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ ». Основываясь на такой ограниченной информации, можно только предположить, что значение $\alpha_{20}(\text{Cu})$ находится с равной вероятностью в интервале от $16,12 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ до $16,92 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ и что очень маловероятно, чтобы $\alpha_{20}(\text{Cu})$ находилось за пределами этого интервала. Дисперсия этого симметричного прямоугольного распределения возможных значений $\alpha_{20}(\text{Cu})$ с полушириной $a = 0,40 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ будет равна $u_B^2(\alpha_{20}) = (0,40 \cdot 10^{-6})^2 / 3 = 53,3 \cdot 10^{-15} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-2}$. Стандартная неопределенность - $u_B(\alpha_{20}) = 0,40 \cdot 10^{-6} / \sqrt{3} = 0,23 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Для вычислений используют следующие формулы.

Суммарная стандартная неопределенность, оцениваемая по типу В

$$u_{c,B} = \sqrt{\sum_{j=1}^m u_{j,B}^2} \quad (12)$$

m – число неопределенностей, оцененных по типу В.

Характеристикой границ неопределенности значения величины является расширенная неопределенность. Для однократных измерений

$$U(P) = k_o \cdot u_{c,B}, \quad (13)$$

где k_o - коэффициент охвата (коэффициент, используемый как множитель суммарной неопределенности для получения расширенной неопределенности). Если нет других соображений, значение коэффициента охвата для доверительной вероятности $P = 0,95$ считают равным 2, для доверительной вероятности $P = 0,99$ - равным 3 [17].

Пример 6. Для задачи, рассмотренной в примере 1, вычислить расширенную неопределенность.

1. Находим стандартную неопределенность типа В по формуле 12

$$u_{c,B} = \sqrt{\frac{\Delta_o^2}{3} + \frac{\Delta_{\text{МП}}^2}{3} + \frac{\Delta_{\text{Г}}^2}{3}} = \sqrt{\frac{0,0075^2}{3} + \frac{0,0225^2}{3} + \frac{0,0045^2}{3}} = 0,014 \text{ В}$$

2. При отсутствии неопределенности типа А, расширенная неопределенность будет равна (формула 13)

$$U(P) = k_o \cdot u_{c,B} = 2 \cdot 0,014 = 0,028 \text{ В},$$

где $k_o = 2$ при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Полученную в результате вычислений оценку погрешности или расширенной неопределенности измерений сравнивают с допустимой погрешностью/неопределенностью.

При $\Delta(P) \leq [\Delta]$ или $U(P) \leq [U]$ можно выделить три случая [11].

1. Значения погрешности (неопределенности) измерений находятся в интервале примерно от 20 до 60% соответствующих пределов допустимых значений - выбор метода и средств измерений можно считать законченным.

2. Значения погрешности (неопределенности) измерений находятся в интервале примерно от 60 до 100% пределов допустимых значений - целесообразно рассмотреть вопрос об уменьшении погрешности (неопределенности), так как проведенный расчет неизбежно приближенный, причем погрешности расчета могут достигать 20 - 30%.

3. Значения погрешности (неопределенности) измерений меньше 20% пределов их допустимых значений – следует изучить возможность получения выгоды от увеличения характеристики погрешности (неопределенности) измерений до примерно 50-60% пределов допустимых значений при удовлетворении всех остальных требований.

При $\Delta > [\Delta]$ ($U(P) > [U]$) принимают меры для уменьшения погрешности (неопределенности) (см. раздел 4)

Иногда добиться выполнения условия $\Delta(P) \leq [\Delta]$ ($U(P) \leq [U]$) невозможно. Тогда следует оценить обоснованность требований к точности измерений.

Необходимости расчета погрешности (неопределенности) результата измерений можно избежать, если измерения выполнять по аттестованным (стандартным или типовым) методикам. Для этого необходимо воспользоваться документом на методику выполнения измерений.

При выборе средств измерений линейных размеров полезно использовать руководящий документ РД 50-98-86 «Методические указания. Выбор универсальных средств измерений линейных размеров до 500 мм» [18], в котором приведены значения пределов погрешностей измерения размеров наружных и внутренних поверхностей универсальными СИ с учетом всех составляющих.

4. Основные способы повышения точности измерений

Если выбранные метод и средства измерений не обеспечивают заданную точность измерения, ищут возможные способы снижения погрешности (неопределенности) результата измерений.

К их числу относятся [22]. (Ниже используется термин погрешность, который может быть безболезненно заменен на термин неопределенность).

1. Замена менее точного средства измерений на более точное – эффективна при доминирующих инструментальных составляющих погрешности измерений.

Ограничения в применении данного способа связаны с условиями эксплуатации средств измерений, необходимостью приобретения или разработки специальных средств измерений. Стоимость средств измерений, как правило, быстро растет с повышением их точности.

2. Уменьшения относительной погрешности можно добиться, выбрав средства измерений, для которых нормированы приведенные погрешности с таким верхним пределом измерений, чтобы ожидаемые значения измеряемой величины (показания) находились в последней трети диапазона измерений.

3. Создание условий для применения средств измерений - целесообразно, если доминируют дополнительные погрешности средств измерений.

Например, для типичных измерительных каналов средств измерений расхода природного газа, содержания кислорода в газовой смеси, давления - дополнительная погрешность, вызванная отклонением действительных значений температуры окружающего воздуха в условиях многих производств от нормального значения, составляет 30 % - 40 % суммарной погрешности измерений. Для измерительных каналов с датчиками давления многих типов промышленная вибрация в месте установки датчиков является источником дополнительной погрешности до 30 % суммарной погрешности измерений.

4. Индивидуальная градуировка средства измерений – применяется при доминирующих систематических составляющих погрешности средств измерений.

Например, для термопар и термометров сопротивления систематическая составляющая погрешности при узком диапазоне измеряемых температур доминирует и остается практически неизменной в течение нескольких месяцев. Такая погрешность может быть значительно снижена путем внесения в результаты измерений поправок, полученных при индивидуальной градуировке.

5.Выполнение многократных измерений в случае доминирования случайной составляющей погрешности измерений.

6.Автоматизация измерительных процедур - способствует исключению субъективных погрешностей, возникающих при обработке диаграмм, вычислении промежуточных и конечных результатов измерений, приготовлении проб для анализов и других операциях, выполняемых человеком.

7. Внедрение способов контроля работоспособного состояния средств измерений в процессе их эксплуатации - способствует выявлению, исключению или снижению метрологических отказов средств измерений.

8.Разработка или совершенствование методик выполнения измерений. Если доминируют методические составляющие погрешности измерений, то этот способ повышения точности измерений является единственно эффективным.

9.Применение методов сравнения с мерой взамен метода непосредственной оценки – это один из наиболее эффективных способов уменьшить или исключить систематическую составляющую погрешности измерений.

Точность методов сравнения с мерой тем выше, чем меньше отличие значения величины, воспроизводимой мерой, от измеряемого значения.

10. Использование тестовых методов (см.[3])

Тестовые методы повышения точности измерений применяют в различных измерительных системах для измерений как электрических, так и неэлектрических величин.

11.Метод обратного преобразования

Применяют при автоматической коррекции погрешности средств измерений. Для реализации этого метода используют обратный преобразователь, реальная статическая функция

преобразования которого совпадает с функцией, обратной номинальной характеристике преобразования средства измерений. Этот метод эффективен только в том случае, если обратный преобразователь значительно точнее прямого преобразователя.

12. Использование информационной избыточности.

Примером использования информационной избыточности в целях повышения точности измерений может служить включение в измерительную систему дополнительных средств измерений, измеряющих одну и ту же величину, и усреднение их показаний. При этом невыявленные систематические погрешности могут быть разного знака и компенсировать друг друга.

Разработку и реализацию мероприятий по повышению точности измерений сопровождает анализ их экономической целесообразности.

5. Создание условий для измерений

Каждое измерение выполняется в определенных условиях, которые характеризуются одной или несколькими величинами, часто оказывающими заметное влияние на измеряемую величину и используемые средства измерений, – их называют **влияющими величинами**. Например, для характеристики условий измерения размера детали штангенциркулем используют такие влияющие величины, как температура окружающего воздуха, освещенность поверхности детали и штангенциркуля. В наибольшей степени в рассматриваемом случае на результат измерения может оказать влияние температура, точнее изменение линейных размеров детали вследствие воздействия на нее температуры окружающей среды. Освещенность также влияет на результат измерения: при недостаточной освещенности оператор может неточно определить совпадение штрихов на основной шкале и шкале нониуса.

Влияющие величины можно разделить на четыре группы:

-климатические (температура окружающей среды, относительная влажность воздуха, атмосферное давление);

-электрические и магнитные (колебания силы электрического тока, напряжения в электрической сети, постоянные и переменные магнитные поля и др.);

-внешние нагрузки (вибрации, ударные нагрузки, внешние касания деталей прибора);

-ионизирующие излучения, газовый состав атмосферы и т.д.

Зависимость метрологических характеристик от значений влияющих величин для различных средств измерения проявляется в разной степени. Если она слабая, то метрологические характеристики средств измерения нормируют для **рабочих условий** применения. Если сильная, то для средств измерений нормируют основную погрешность, соответствующую **нормальным условиям** их применения, и дополнительную погрешность, которая появляется в случае отличия условий измерений от нормальных. Формулы для вычисления дополнительных погрешностей приводятся в паспортах средств измерений в виде номинальных функций влияния.

Таким образом, **нормальные условия** – это условия применения средств измерений, при которых изменением их метрологических характеристик вследствие изменения значений влияющих величин можно пренебречь.

Нормальные условия характеризуют допустимыми границами изменения влияющих величин, которые называют **пределами нормальной области значений** влияющих величин. Эти пределы задают в виде номинального значения влияющей величины и допустимых отклонений. В таблице 1 приведены номинальные значения часто принимаемых во внимание влияющих величин.

При точных измерениях для поддержания нормальных условий применяют специальные средства защиты от воздействия влияющих величин. Так, влияние температуры исключают путем термостатирования. Термостатировать можно части измерительной аппаратуры (катушки сопротивления, нормальные элементы и др.), средства измерений, большие помещения (цеха, лаборатории), небольшие комнаты, камеры. Термостатирование может быть естественным (например, использование подвалов, бункеров) и искусственным (применение электрических подогревателей, кондиционеров, холодильников).

Таблица 1

Влияющая величина	Значение
1. Температура для всех видов измерений, °С (К)	20 (293)
2. Давление окружающего воздуха для ионизирующих измерений, теплофизических, температурных, магнитных, электрических, измерений, измерения давления и параметров движения, кПа (мм рт. ст.)	100 (750)
3. Давление окружающего воздуха для линейных, угловых измерений, измерений массы и др. кроме п.2, кПа (мм рт. ст.)	101,3 (760)
4. Относительная влажность воздуха для линейных, угловых измерений, измерений массы, %	58
5. Относительная влажность воздуха при измерении электрического сопротивления, %	55
6. Относительная влажность воздуха для измерений температуры, силы, твердости, переменного электрического тока, ионизирующих излучений, параметров движения, %	65
7. Относительная влажность воздуха для всех видов измерений, кроме указанных в п. 4 –6, %	60
8. Плотность воздуха, кг/м ³	1,2
9. Ускорение свободного падения, м/с ²	9,8
10. Магнитная индукция и напряженность электростатического поля для измерения параметров движения, электрических и магнитных величин	0
11. Магнитная индукция и напряженность электростатического поля для всех видов измерений, кроме указанных в п. 10	Соответствует характеристикам поля Земли в данном географическом районе
12. Частота питающей сети переменного тока, Гц	50 (±1%)
13. Среднеквадратическое значение напряжения питающей сети переменного тока, В	220 (±10%)

С целью устранения вибраций и сотрясений применяют амортизаторы – эластичные подвесы (струны, пружины), губчатую резину и т.д.

Средством защиты от влияния магнитного поля земли служат экраны из магнитно-мягких материалов. Чтобы уменьшить влияние атмосферного давления и влажности, применяют барокамеры. Средства измерений располагают так, чтобы они не влияли друг на друга.

В случаях, когда обеспечить нормальные условия невозможно (например, измерения в открытом пространстве), устанавливают менее жесткие условия выполнения измерений, называемые рабочими условиями. *Рабочие условия измерений* - условия измерений, при которых значения влияющих величин находятся в пределах рабочих областей. *Рабочая область значений влияющей величины* - область значений влияющей величины, в пределах которой нормируют дополнительную погрешность или изменение показаний средства измерений.

Для сопоставления результатов измерений, полученных в разных рабочих условиях, их приводят к нормальным условиям, для чего фиксируют действительные значения влияющих величин или их пределы. Значение влияющей величины, к которому приводят результаты измерений одной и той же величины, выполненные в разных условиях, называют **номинальным значением**.

Средства регистрации значений влияющих величин выбирают так, чтобы погрешность их была пренебрежимо мала по сравнению с изменением значения влияющей величины.

При воздействии на измеряемую величину нескольких влияющих величин учитывают вес каждой составляющей.

Порядок расчета инструментальной погрешности с учетом отклонения влияющих величин от нормальных значений рассмотрен в книге [31, пример 5].

6. Многократные измерения.

Многократное измерение – определение значения величины путем математической обработки совокупности последовательно

выполненных отсчетов показаний средств измерений. Для того, чтобы можно было применить формулы математической статистики число отсчетов должно быть не меньше четырех. Положительной стороной такого подхода является то, что при этом учитываются все случайные погрешности вне зависимости от их происхождения. Поэтому важно не допустить двойного счета случайных погрешностей, когда, например, характеристики случайной погрешности используются для вычисления погрешности средства измерений или неопределенности типа В.

Многократное измерение целесообразно производить при доминирующей случайной составляющей погрешности измерений (неопределенности типа А). Повышение точности результата многократного измерения достигается вследствие уменьшения оценки погрешности (неопределенности типа А) среднего арифметического значения совокупности наблюдений при увеличении числа отсчетов.

Выполнение многократного измерения предполагает повышенные требования к стабильности измеряемой величины, к поддержанию неизменными значений влияющих величин, к квалификации оператора, к периодичности выполнения отсчетов. Затраты времени на измерения и обработку результатов значительны. Поэтому решение о использовании многократного измерения должно быть технически и экономически обосновано.

Многократные измерения в большой мере являются лабораторными измерениями и делятся на равноточные и неравноточные измерения. Остановимся на равноточных измерениях. (Примеры обработки рядов неравноточных измерений приведены в книгах [2, 9, 26, 28]).

Равноточными называют измерения, которые выполняют средствами измерений одинаковой точности (одним и тем же средством измерений), по одной и той же методике, одним и тем же оператором и при неизменных внешних условиях. Интервалы между отсчетами должны быть минимальными.

Исходной информацией для обработки является ряд отсчетов показаний средства измерений x_1, x_2, \dots, x_n (n – число наблюдений, отсчетов), в который внесены поправки на известные

систематические эффекты. При этом предполагается, что после внесения поправки математическое ожидание или ожидаемое значение погрешности, возникающей от систематического эффекта, равно нулю.

Для выявления переменной систематической погрешности строят точечную диаграмму: по оси абсцисс откладывают порядковый номер наблюдения, а по оси ординат измеренное значение величины. О наличии такой погрешности будет свидетельствовать общая тенденция графической интерпретации результатов наблюдений к возрастанию или убыванию. Наличие переменной систематической погрешности может быть установлено статистическими методами (методы Аббе, Фишера, Вилкоксона, и др. См., например, книги [16, 26]).

Для удобства обработки результаты наблюдений располагают в порядке их возрастания. Полученный таким образом ряд значений называют *вариационным* рядом (упорядоченная выборка).

Рассмотрим ситуации, в которых реализуются многократные измерения.

Ситуация 1: измерения выполняют для экспериментального установления закона распределения результатов измерений при использовании конкретной методики или средства измерений. Для получения достоверных представлений о законе распределения минимальное число отсчетов начинается с $n > 200$ и чем оно больше, тем лучше. При меньшем объеме ($n = 20 \dots 200$) особенности распределения оказываются замаскированными случайностью самой выборки [4, 15].

Математическая обработка результатов многократных измерений включает следующие этапы.

1. Определяют центр распределения $X_{ЦР}$, в качестве которого могут рассматриваться: среднее арифметическое, среднее арифметическое для усеченной выборки, медиана, центр размаха и центр срединного размаха [2].

Среднее арифметическое значение

$$X_{\text{ЦР}} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. Находят значения центральных моментов распределения (с первого по четвертый)

$$\mu_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - X_{\text{ЦР}})^r$$

где r – порядковый номер момента.

3. Вычисляют несмещенную оценку среднеквадратического отклонения

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - X_{\text{ЦР}})^2}$$

4. Исключают из ряда наблюдений отсчеты (промахи), выходящие за границы

$$\bar{x} \pm S \cdot \left[1 + 1,3 \cdot \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} - 1} \right]$$

После чего повторно выполняют вычисления по пунктам 1 – 3. (В ГОСТ Р 8.736 - 2011 для выявления промахов рекомендуются для применения критерии Граббса.)

5. Строят гистограмму и полигон распределения:

а) диапазон $x_{\min} \dots x_{\max}$ разбивают на интервалы. Число интервалов принимают нечетным, ближайшим большим к значению

$$m = 1 + 3,31 \cdot \lg n.$$

Так при $n = 40 \dots 100$ число интервалов будет равно 7 или 9. Ширина интервала $d = (x_{\max} - x_{\min}) / m$.

Для определения числа интервалов применимы также формулы $m = \sqrt{n}$, а также рекомендации, приведенные в книгах [2, 4, 26].

б) подсчитывают число n_k значений отсчетов в каждом k -ом интервале и рассчитывают частоты попадания

$$p_k = n_k / n.$$

в) строят гистограмму - зависимость частоты попадания в интервал от величины x (ступенчатая фигура на рисунке 2а) и

полигон (совокупность отрезков, соединяющих середины прямоугольников) распределения, а также кумулятивную функцию (рис. 2б)

$$F_k = \sum_{k=1}^m p_k = F(x)$$

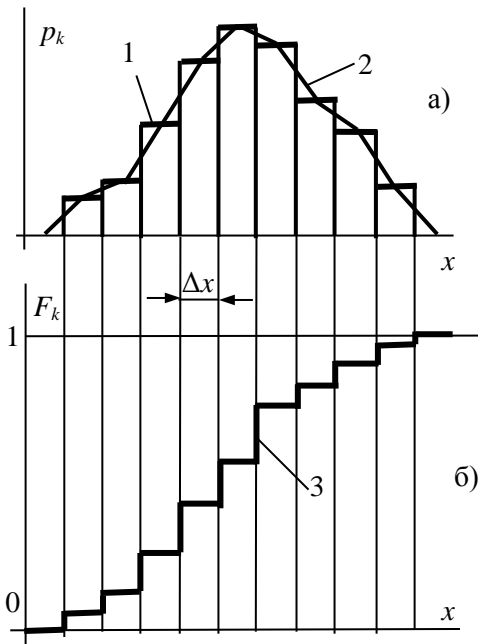


Рис. 2. а) гистограмма 1, полигон распределения 2 и б) кумулятивная функция результатов измерения

На основе сопоставления полигона распределения с графиками теоретических законов распределения (приводятся в книгах [2, 15, 29]) делают предположение о соответствии полигона какому-либо теоретическому закону. Указанное соответствие проверяется с помощью критериев согласия: Пирсона (χ^2) или ω^2 – критерия.

Вопросы идентификации распределения вероятностей при решении измерительных задач рассмотрены в книгах [2, 19]. Там же можно найти числовые примеры решения рассмотренной задачи.

Ситуация 2. Требуется оценить значение измеряемой величины и доверительного интервала, в котором оно находится. Закон распределения и/или среднеквадратическое отклонение S известны. Такое возможно, если, например, в паспорте средства измерений выделены характеристики случайной составляющей погрешности. Знание закона распределения позволяет обоснованно выбрать формулы для определения центра распределения (оценки значения величины) и доверительные границы случайной погрешности.

Решение задачи следует начать с вычисления суммарного значения неисключенной систематической погрешности Θ (P) по формулам (5) или (6).

Требуемое количество отсчетов устанавливают из условия достижения заданной точности измерений (соотношение 1) или исходя из критерия ничтожной погрешности.

Обозначим буквой $[q]$ допустимую ошибку вычисления погрешности из-за пренебрежения случайной составляющей. Критерий ничтожной погрешности представим в виде [12]

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{2[q] - [q]^2}}{1 - [q]} \cdot \frac{\Theta}{\sqrt{3}}$$

Полагая, что $q^2 \ll 2q$, найдем

$$n_{max} \approx \frac{1,5 \cdot (1 - 2[q])}{[q] \cdot (\Theta/S)^2}$$

В книге [4] принято значение $[q]=0,05$ (5%). Для этого случая справедливо $n_{max}=27/(\Theta/S)^2$. Уменьшение $[q]$ до 0,005 приведет к увеличению n_{max} более чем в 10 раз. Подставив $[q]=0,022$ (2,2%), получим $n_{max}=65/(\Theta/S)^2$, что соответствует формуле, приведенной в книге [25].

За пределом n_{max} случайная составляющая погрешности становится пренебрежимо малой.

Значение $n_{max} < 4$ – повод для сомнения в целесообразности многократного измерения.

При достижении в процессе измерений $n = n_{max}$ суммарную погрешность оценивают только границами неисключенной систематической погрешности $\Theta(P)$.

По экономическим или техническим причинам достижение n_{max} может быть не целесообразным или не возможным. Тогда для расчета *суммарной погрешности* оценки значения величины реализуют следующий порядок.

Устанавливают доверительные границы случайной погрешности оценки среднего арифметического значения

$$\varepsilon(P) = \pm t \cdot S_{\bar{x}} = \pm t \cdot S / \sqrt{n} \quad (14)$$

где t - коэффициент, зависящий от доверительной вероятности P и установленного теоретического закона распределения.

Если априорные сведения указывают нормальное распределение, а число отсчетов $n < 30$, то вместо нормального закона применяют распределение Стьюдента.

Определяют границы погрешности измерений

$$\Delta(P) = k_n \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\Theta_j^2}{3} + S_{\bar{x}}^2} \quad (15)$$

(здесь Θ_j - граница неисключенной систематической составляющей погрешности измерений, m - число неисключенных систематических погрешностей).

Коэффициент k_n равен

$$k_n = \frac{\varepsilon(P) + \Theta(P)}{S_{\bar{x}} + \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\Theta_j^2}{3}}} \quad (16)$$

Результат измерения записывают в виде: $\bar{x} \pm \Delta(P)$; P .

Основные положения по обработке результатов многократных измерений для *нормального закона распределения* рассмотрены в стандарте ГОСТ Р 8.736 – 2011 [19].

Если в качестве характеристики результата измерения принята *расширенная неопределенность*, то формула для вычисления максимального числа отсчетов запишется так

$$n_{max} \approx \frac{(1 - 2[q])}{2[q] \cdot (u_{c,B}/u_A)^2}$$

Здесь $u_A=S$ – стандартная неопределенность отдельного отсчета.

Значение стандартной неопределенности типа В вычисляют по формуле (12) с использованием рекомендаций, приведенных на страницах 18 - 21.

Расширенную неопределенность в соответствии с рекомендациями [21, 24] находим по формуле

$$U(P) = k_0 \cdot u_C \quad (17)$$

где $u_C = \sqrt{u_A^2(\bar{x}) + u_{c,B}^2}$ – суммарная стандартная неопределенность.

Стандартная неопределенность типа А есть среднеквадратическое отклонение оценки среднего арифметического значения величины (центра группирования)

$$u_A(\bar{x}) = S_{\bar{x}} .$$

Закон распределения, характеристикой которого является суммарная стандартная неопределенность, есть композиция *законов распределения* неопределенностей типа А и В. Его идентификация - не простая задача. Поэтому выбор коэффициента охвата k_0 зачастую базируется на предположении о возможном распределении.

В общем случае [24] коэффициент охвата k_0 определяют как

$$k_0 = t_p(v_{eff}) \quad (18)$$

где $t_p(v_{eff})$ – квантиль распределения Стьюдента (таблица 2) с эффективным числом степеней свободы v_{eff} и доверительной вероятностью (уровнем доверия) P .

Эффективное число степеней свободы вычисляют по формуле

$$v_{eff} = \frac{u_C^2}{\frac{u_A^4(\bar{x})}{v}}$$

где $v = n - 1$ – число степеней свободы.

В Руководстве [24] отмечается, что во многих практических случаях концепция нормального закона распределения является адекватным подходом. В предположении нормального закона распределения при $P=0,95$ принимают $k_0 = 2$, при $P=0,99$ $k_0 = 3$. Для равномерного закона распределения - при $P=0,95$ $k_0 = 1,65$; при $P=0,99$ $k_0 = 1,71$.

Таблица 2. Значение коэффициента $t_p(v)$ для случайной величины, имеющей распределение Стьюдента с v степенями свободы и заданной вероятности P

v	$p = 0,95$	$p = 0,99$	v	$p = 0,95$	$p = 0,99$
3	3,182	5,841	16	2,120	2,921
4	2,776	4,604	18	2,101	2,878
5	2,571	4,032	20	2,086	2,845
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	3,499	24	2,064	2,797
8	2,306	3,355	26	2,056	2,779
9	2,262	3,250	28	2,048	2,763
10	2,228	3,169	30	2,042	2,750
12	2,179	3,055	∞	1,960	2,576
14	2,145	2,977			

Ситуация 3. Требуется оценить значение измеряемой величины и доверительного интервала, в котором оно находится. Закон распределения не известен.

Для решения вопроса об объеме статистической обработки следует сравнить сумму неисклученных систематических погрешностей Θ с размахом R (размах – разность наибольшего и наименьшего спектральных значений случайной величины). В предположении закона равной вероятности при выполнении условия $R/\sqrt{n} \leq 2\sqrt{2[q] - [q]^2} \cdot \Theta/(1 - [q])$ случайной составляющей погрешности (стандартной неопределенностью типа А) можно пренебречь. Достаточно вычислить среднее

арифметическое значение. Если условие не выполняется, реализуем следующий алгоритм.

1. В качестве оценки значения измеряемой величины принимают среднее арифметическое значение \bar{x} , являющееся в большинстве случаев наилучшей доступной оценкой математического ожидания или ожидаемого значения величины, изменяющейся случайным образом

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. Вычисляют статистическое среднеквадратическое отклонение (*стандартная неопределенность типа A для единичного наблюдения*)

$$S = u_A = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

3. Исключают результаты с грубыми погрешностями или промахами с помощью критериев «трех сигм», Романовского (при $n < 20$), Шарлье ($n > 20$), или других (Диксона, Граббса, Шовене). Описание и примеры применения перечисленных критериев приведены в книгах [2, 9, 26 и др.]. В частности к промахам относят значения отсчетов, выходящие за границы

$$\bar{x} - t \cdot S > x_i > \bar{x} + t \cdot S$$

Значение коэффициента t зависит от принятой вероятности P и критерия оценки промахов. При неизвестном законе распределения часто применяют неравенство Чебышева, согласно которому

$$t \geq \sqrt{\frac{1}{1-P}}$$

При $P = 0,95$ получим $t = 4,48$.

4. Повторно вычисляют значения \bar{x} и S для n' , (n' - число наблюдений за вычетом промахов). Исходя из соотношения суммы неисключенных систематических погрешностей Θ и среднеквадратического отклонения единичного наблюдения S , решают вопрос об увеличении числа наблюдений или о

необходимости учета случайной составляющей погрешности (см. с.33).

5. При ограниченном числе наблюдений и существенном S вычисляют среднеквадратическое отклонение среднего арифметического значения (*стандартную неопределенность типа A*)

$$S_{\bar{x}} = u_A(\bar{x}) = S/\sqrt{n'}$$

6. Результаты измерений представляют графически в виде гистограммы и полигона распределения.

7. Далее проверяют соответствие экспериментального распределения *нормальному закону*. При $15 < n < 50$ рекомендуется использовать составной критерий, при $n > 50$ критерий Пирсона или Мизеса-Смирнова. При $n \leq 15$ принадлежность к нормальному закону не проверяют.

Если соответствие нормальному закону не подтвердилось, то выдвигается гипотеза о возможном законе распределения. При ограниченном объеме выборки надежные критерии оценки правильности гипотезы отсутствуют. Поэтому на практике в этих случаях принимают нормальный закон (что ставит под сомнение необходимость действий по п.6 и 7) или распределение Стьюдента (при $n < 30$). Одним из оснований для такого решения является утверждение [15], что закон распределения среднего арифметического \bar{x} при $n > 30$ близок к нормальному при любом законе распределения исходных данных, если контрэксцесс не равен нулю ($k \neq 0$). Однако сравнительно точное определение центрального момента четвертого порядка μ^4 и связанного с ним контрэксцесса возможно при числе отсчетов более двухсот. В данном случае точное знание контрэксцесса не требуется и о его неравенстве нулю можно судить по форме полигона распределения и характеристикам предполагаемого теоретического закона.

8. Вычисляют случайную и суммарную погрешности измерений по формулам (14)-(16).

Если результат многократного измерения предназначен для использования в расчетах (косвенные измерения), то статистическую обработку можно ограничить пунктами 1-5.

Вычисление суммарной стандартной неопределенности и расширенной неопределенности в ситуации 3 осуществляется более просто. После реализации пунктов 1 – 5 следует применить формулы и рекомендации, приведенные для случая 2.

Пример 7. При многократном измерении получены значения силы в Н 263, 268, 273, 265, 267, 261, 266, 264, 267. Систематическая погрешность равна +2 Н. Записать результат измерений с доверительной вероятностью $P=0,95$.

1. Среднее арифметическое значение силы

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum F_i = \frac{1}{9} (261 + \dots + 273) = 266 \text{ Н}$$

С учетом поправки на систематическую погрешность оценка значения силы будет равна: $F=266 + (-2) = 264 \text{ Н}$.

2. Среднеквадратическое отклонение среднего арифметического значения силы

$$u_A(\bar{F}) = S(\bar{F}) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)n} \sum (F_i - \bar{F})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(9-1) \cdot 9} [(261 - 266)^2 + \dots + (273 - 266)^2]} = 1,15 \text{ Н}$$

3. Так как закон распределения в исходных данных не определен, предполагаем, что рассеяние отсчетов подчиняется нормальному закону. С учетом того, что $n=9 < 30$ принимаем закон распределения Стьюдента.

4. Доверительные границы случайной погрешности

$$\varepsilon(P) = \pm t \cdot S(\bar{F}) = 2,37 \cdot 1,15 = 2,7 \text{ Н}$$

где t -квантиль распределения Стьюдента. При числе степеней свободы $f_{\text{эфф}} = n - 1 = 9 - 1 = 8$ и заданной вероятности $P=0,95$ из таблицы 2 найдем $t = t_p(f_{\text{эфф}}) = t_{0,95}(8) = 2,37$.

5. Результат измерения $F = (264 \pm 3) \text{ Н}$, $P = 0,95$.

7. Подготовка оператора

Одной из составляющих суммарной погрешности измерений является личностная погрешность, вносимая оператором, которую в основном связывают с правильностью выполнения отсчета по шкале прибора. Однако на погрешность измерений могут повлиять

действия оператора при подготовке и в процессе выполнения измерений.

При подготовке к измерениям оператору необходимо:

- ознакомиться с процедурой выполнения измерений и последовательностью операций, инструкциями по эксплуатации применяемых средств измерений, с требованиями методик измерений;

- убедиться в том, что средства, используемые для измерений и фиксирования значений влияющих величин прошли поверку и имеют действующие свидетельства о поверке или поверительное клеймо (знак поверки);

- выполнить работы по подготовке средств и объекта измерений к измерениям (например, прогреть измерительный прибор или объект измерений, проверить действие органов управления, заправить бумагу в самописец, произвести калибровку прибора и т.д.).

При проведении измерений оператор должен:

- соблюдать условия измерений и поддерживать их в заданном режиме;

- соблюдать технику безопасности при работе со средствами измерений или измерительными установками;

- занять удобное положение, не вызывающее быстрого утомления, с тем чтобы случайные неловкие движения не привели к неудачным отсчетам или порче средств измерений;

- не допускать перерывов в проведении отсчетов, если указано, что отсчеты должны выполняться непрерывно;

- вести тщательную запись отсчетов, указывая при этом дату и интервал времени, регистрировать отсчеты в той форме, в которой они получены;

- вести запись с числом цифр на две более, чем требуется в окончательном результате;

- определить возможные источники систематических погрешностей и методы их исключения.

Качество работы оператора определяется погрешностью округления при снятии отсчетов и погрешностью наведения. Погрешность округления не должна влиять на последнюю

значашую цифру погрешности окончательного результата измерения. Как правило, она не должна превышать 10% от допустимой погрешности окончательного результата измерений. Если это условие оператором не выполняется, то число отсчетов увеличивают на столько, чтобы условие было удовлетворено.

Если погрешность оператора при совмещении штрихов, фиксации звуковых сигналов и т.п. систематическая, ее следует выявить, а поправку внести в результаты измерений. Если же это сделать невозможно или же систематическая составляющая погрешности измерений, вносимая оператором, изменяется, измерения выполняет 3-4 оператора. В этом случае систематическая погрешность рассматривается как случайная величина.

Проблемы, связанные с отсчетом показаний, можно устранить заменой аналоговых средств измерений на цифровые. Однако это не всегда приемлемо, так как аналоговые приборы считаются более информативными.

При оценке значения величины по шкале прибора необходимо учитывать, что число делений шкалы согласовано с его классом точности. При определении визуально долей деления шкалы операторы допускают ошибку до 0,2 ... 0,5 деления. По этой причине рекомендуется [9] отсчет выполнять с округлением до половины деления.

8. Математические действия с результатами измерений. Определение результата косвенных измерений.

При косвенных измерениях значение искомой величины получают на основании известной зависимости, связывающей ее с другими величинами, значения которых получены путем измерения.

В общем случае

$$Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (19)$$

В состав аргументов в правой части уравнения, называемого **моделью измерений**, (19) входят не только величины, значения которых определяют в данном опыте путем измерения, но и

величины, значения которых являются справочными данными или найдены в предыдущих опытах (так называемые *заимствованные величины*).

(Модель измерений – математическая связь между всеми величинами, о которых известно, что они причастны к измерению).

Учитывая случайный характер оценок значений величин, подставляемых в расчетную зависимость, для вычислений используем формулы теории вероятностей [5].

Для нахождения математического ожидания и границ рассеяния величины Y представим зависимость (19) приближенно в виде линейной функции (разложение в ряд Тейлора). Ограничимся производными не более второго порядка

$$Y \approx f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (X_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \cdot (X_i - a_i) \cdot (X_j - a_j)$$

Здесь $(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)$ – точка, в окрестностях которой осуществляется разложение функции.

Оценка значения величины Y будет равна

$$\bar{Y} \approx M(Y) \approx M[f(a_1, a_2, \dots, a_n)] + M \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (X_i - a_i) \right] + M \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \cdot (X_i - a_i) \cdot (X_j - a_j) \right]$$

Или

$$\bar{Y} \approx M(Y) \approx f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot [M(X_i) - a_i] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \cdot M[(X_i - a_i) \cdot (X_j - a_j)] \quad (20)$$

В формулу (20) подставляют $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$, равные оценкам значений величин X_i . (Оценка значения величины - это показание средства измерений при однократном измерении и среднее арифметическое значение совокупности отсчетов - при многократном измерении; для заимствованной величины - справочное значение.)

Разность $M(X_i) - a_i$ равна (со знаком минус) отклонению оценки значения величины от математического ожидания, то есть - систематической погрешности. Если систематические погрешности исключены введением поправок, то имеем $M(X_i) = a_i$. Тогда запись формулы (20) упростится

$$\bar{Y} \approx M(Y) \approx f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \cdot \sigma^2(X_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma(X_i) \cdot \sigma(X_j) \quad (21)$$

Здесь и ниже для обозначения среднеквадратического отклонения использована буква σ традиционная для теории вероятностей.

Из сопоставления формул (20) и (21) вытекает обоснованность требования, чтобы **перед выполнением математических операций значения поправок, обусловленные систематическими погрешностями, были внесены в результаты измерений.**

Коэффициент корреляции ρ_{ij} характеризует взаимосвязь между изменениями величин, обусловленными влиянием одних и тех же факторов. Возможные значения коэффициента корреляции лежат в границах $-1 \leq \rho_{ij} \leq +1$. При положительной корреляции, когда при увеличении X_i , вызванном изменением какого-либо фактора, наблюдается увеличение X_j , $\rho_{ij} > 0$. При отрицательной корреляции их изменения противоположны и $\rho_{ij} < 0$. Оценки X_i и X_j независимы ($\rho_{ij} = 0$), если изменение одной из них не сопровождается ожидаемым изменением другой.

Взаимная корреляция результатов измерений может быть обусловлена: взаимным пространственным расположением измерительных каналов; плохим экранированием; зависимостью

погрешностей разных средств измерений, применяемых при данных косвенных измерениях, от одних и тех же влияющих величин и др.

Наличия корреляции можно ожидать в тех случаях, когда величины измеряют одновременно средствами измерений одного типа (одним и тем же средством измерений). В некоторых случаях причиной корреляции может быть оператор, выполняющий измерения.

При выполнении многократных косвенных измерений коэффициент корреляции вычисляют по формуле

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^m (x_{il} - \bar{x}_i)(x_{jl} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{l=1}^m (x_{il} - \bar{x}_i)^2 \cdot \sum_{l=1}^m (x_{jl} - \bar{x}_j)^2}} \quad (22)$$

Здесь буквой l обозначен порядковый номер совместного наблюдения оценок значений величин X_i и X_j ; m – общее число наблюдений; \bar{x}_i и \bar{x}_j – средние арифметические значения оценок, полученных при измерении величин X_i и X_j

По формуле (22) вычисляют коэффициент корреляции между случайными погрешностями (стандартными неопределенностями типа А), полученными в результате многократных измерений. Для неисключенных систематических погрешностей и неопределенностей, относимых к типу В, он оценивается на основе анализа свойств применяемых средств измерений и метода измерений.

Так как в большинстве случаев точное значение коэффициента корреляции найти невозможно, то оценки значений величин X_i и X_j условно разделяют [15] на сильно коррелированные $0,7 < |\rho_{ij}| \leq 1,0$ и слабо коррелированные при $|\rho_{ij}| < 0,7$. В первом случае принимают $\rho_{ij} = +1,0$ или $\rho_{ij} = -1,0$, во втором – $\rho_{ij} = 0$.

Если степень корреляции неизвестна, полезно оценить её влияние на результат вычислений, приняв последовательно $\rho_{ij} = 0$ и $\rho_{ij} = 1$.

При отсутствии корреляции

$$\bar{Y} \approx M(Y) \approx f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \cdot \sigma^2(X_i) \quad (23)$$

На практике, как правило, суммой дисперсий, которую называют *поправкой на нелинейность*, в формуле (23) пренебрегают ввиду её малости по сравнению со среднеквадратическим отклонением (стандартной неопределенностью $u_c(\bar{Y})$) оценки математического ожидания величины Y . Расчет оценки значения величины Y ведут по формуле

$$\bar{Y} \approx M(Y) \approx f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Однако в некоторых ситуациях (например, при большом разбросе статистических данных) это может привести к заметной методической погрешности (см. примеры 39, 40 и 49 в книге [23]).

Определим дисперсию оценки значения величины Y . Согласно книге [5], в случае некоррелированных и независимых величин, справедлива формула

$$\begin{aligned} \sigma^2(Y) = & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma^2(X_i) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)^2 [\mu_4(X_i) - \sigma^4(X_i)] + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \right)^2 \sigma^2(X_i) \cdot \sigma^2(X_j) \\ & + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) \cdot \mu_3(X_i) \end{aligned} \quad (24)$$

Формулу (24) можно применять в случаях, когда известны достоверные оценки центральных моментов μ_3 и μ_4 .

Для величин, распределенных по закону, близкому к нормальному, запись формулы (24) существенно упрощается

$$\begin{aligned} \sigma^2(Y) = & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma^2(X_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right)^2 \sigma^4(X_i) + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \right)^2 \sigma^2(X_i) \cdot \sigma^2(X_j) \end{aligned} \quad (25)$$

Руководство по выражению неопределенности измерений [24] предлагает следующие формулы для расчета суммарной дисперсии.

При незначительной нелинейности зависимости (19)

$$\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma^2(X_i) \quad (26)$$

При значительной нелинейности, когда распределение каждого X_i располагается симметрично относительно среднего значения,

$$\begin{aligned} \sigma^2(Y) = & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma^2(X_i) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j^2} \right] \sigma^2(X_i) \cdot \sigma^2(X_j) \quad (27) \end{aligned}$$

При незначительной нелинейности для коррелированных величин

$$\begin{aligned} \sigma^2(Y) = & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma^2(X_i) \\ & + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \rho_{ij} \cdot \sigma(X_i) \cdot \sigma(X_j) \quad (28) \end{aligned}$$

При вычислении значений частных производных во всех рассмотренных случаях подставляют оценки значений величин X_i , то есть $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$.

Формулы (27) и (28) применяют для расчета как погрешности оценки величины Y , так и расширенной неопределенности. Запишем расчетные зависимости для *некоррелированных* случайных величин при незначительной нелинейности с учетом ранее принятых обозначений.

Вычисление погрешности оценки значения величины Y .

Случай 1. Значения аргументов установлены при однократных измерениях.

Для определения погрешности измерений применимы ранее приведенные формулы (раздел 3), дополненные *коэффициентом влияния*. Коэффициентами влияния b_i называют частные производные $\partial f/\partial x_i$, входящие в формулы (20) - (28). Таким образом, $b_i = \partial f/\partial x_i$.

Неисключенная систематическая составляющая погрешности измерений, в зависимости от способа представления исходных данных может быть вычислена по формулам

$$\theta_Y(P) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2 \cdot \theta^2(X_i)} \quad (29)$$

или

$$\theta_Y(P) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{b_i^2 \theta_{X_i}^2(P_i)}{k_{P_i, X_i}^2}} \quad (30)$$

Среднеквадратическое отклонение случайной составляющей погрешности будет равно

$$S(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2 \cdot S^2(X_i)} \quad (31)$$

Здесь n – число суммируемых случайных погрешностей.

Доверительные границы случайной составляющей погрешности

$$\varepsilon_Y(P) = Z_{P/2} \cdot S(Y) \quad (32)$$

Если случайные погрешности представлены доверительными границами $\varepsilon_i(P)$, соответствующими одной и той же вероятности,

доверительную границу случайной погрешности результата однократного измерения вычисляют по формуле

$$\varepsilon_Y(P) = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2 \varepsilon_{X_i}^2(P)} \quad (33)$$

Если случайные погрешности представлены доверительными границами, соответствующими разным вероятностям, сначала определяют СКО результата измерения по формуле

$$S(Y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2 \varepsilon_{X_i}^2(P_i)}{k_{X_i, P_i}^2}} \quad (34)$$

Доверительную границу погрешности результата измерений вычисляют по формуле

$$\Delta_Y(P) = K \cdot [\Theta_Y(P) + \varepsilon_Y(P)]. \quad (35)$$

Рекомендации по выбору коэффициентов k , K и $Z/2$ приведены в разделе (3).

Случай 2. Искомое значение величины вычисляют на основе результатов многократных измерений.

Исходными данными являются средние арифметические значения величин и характеристики их неисключенных систематических и случайных погрешностей. Если измерения двух и более величин выполняются одновременно или средствами измерений одного типа, следует выполнить исследование на предмет установления корреляции между ними.

Суммарную неисключенную систематическую погрешность вычисляют по формулам (29) или (30).

Среднеквадратическое отклонение случайной составляющей погрешности будет равно

$$S(\bar{Y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2 S^2(\bar{X}_i)} \quad (36)$$

Устанавливают доверительные границы случайной погрешности

$$\varepsilon_{\bar{Y}}(P) = \pm t \cdot S(\bar{Y}) \quad (37)$$

где t - коэффициент, зависящий от доверительной вероятности P и установленного теоретического закона распределения.

В предположении нормального распределения значение t определяют как коэффициент Стьюдента (таблица 2), соответствующий доверительной вероятности P и числу степеней свободы, вычисляемому по формуле

$$f_{\text{эф}} = \frac{[\sum_{i=1}^m b_i^2 \cdot S^2(\bar{X}_i)]^2 - \frac{2}{m+1} \sum_{i=1}^m b_i^4 \cdot S^4(\bar{X}_i)}{\frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m b_i^4 \cdot S^4(\bar{X}_i)}$$

Определяют границы погрешности величины Y

$$\Delta_Y(P) = k_n \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{b_i^2 \cdot \theta^2(X_i)}{3} + S^2(\bar{Y})} \quad (38)$$

(здесь θ_i - граница неисключенной систематической составляющей погрешности измерений, m - число неисключенных систематических погрешностей).

Коэффициент k_n равен

$$k_n = \frac{\varepsilon_{\bar{Y}}(P) + \theta_Y(P)}{S(\bar{Y}) + \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{b_i^2 \cdot \theta^2(X_i)}{3}}} \quad (39)$$

Вычисление расширенной неопределенности оценки значения величины Y .

При однократных измерениях неопределенности типа А отсутствуют. Стандартную неопределенность типа В вычисляют по формуле

$$u_B(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2 \cdot u_B^2(X_i)} \quad (40)$$

а расширенную по формуле (13).

В случае многократных измерений вычисляют также стандартную неопределенность типа А

$$u_A(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2 \cdot u_A^2(\bar{X}_i)} \quad (41)$$

Формулы (40) и (41) отличаются числом слагаемых.

Раздельное вычисление стандартных неопределенностей типа А и типа В обусловлено с одной стороны разной степенью корреляции между оценками неопределенностей, относимых к типу А и к типу В. С другой стороны по соотношению оценок неопределенностей разных типов можно сделать выводы о целесообразности многократных измерений, об ограничении числа наблюдений, о выборе пути по повышению точности результата измерений.

Расширенная неопределенность величины Y

$$U_Y(P) = k_o \sqrt{u_A^2(Y) + u_B^2(Y)} \quad (42)$$

Коэффициент охвата k_o выбирают по правилам, изложенным в разделе (6).

Эффективное число степеней свободы вычисляют по формуле

$$v_{eff} = \frac{u_c^2(Y)}{\sum_{i=1}^n \frac{u^4(X_i)}{v_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^4} \quad (43)$$

где v_i – число степеней свободы при определении оценки i -ой входной величины:

$v_i = m_i - 1$ - если $u(X_i)$ есть неопределенность типа А и

$v_i = \infty$ - если $u(X_i)$ есть неопределенность типа В.

Возможным вариантом нахождения величины Y при многократных измерениях аргументов является вычисление оценок значений Y_k для каждой совокупности одновременно наблюдаемых отсчетов X_{ik} . После чего для ряда значений Y_k ($k = 1 \dots m$) определяют вероятностные характеристики и результат измерения по правилам, изложенным в разделе 6. Этому методу, называемому

методом приведения, отдадут предпочтение, если зависимость (19) нелинейная.

Простейшими математическими действиями с результатами измерений являются сложение и вычитание. Они, например, присутствуют при определении значения блока мер; при реализации метода сравнения с мерой или другой величиной, значение которой известно; при взвешивании вещества в таре; при исключении из показания омметра сопротивления соединяющих проводов и т.д.

Оценка значения искомой величины равна алгебраической сумме оценок измеряемых величин

$$Y = \sum_{i=1}^n c_i \cdot X_i ,$$

где $c_i = +1$ для слагаемых и -1 – для вычитаемых аргументов.

Суммарная дисперсия определится как

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot u^2(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_i \cdot c_j \cdot \rho_{ij} \cdot u(X_i) \cdot u(X_j)$$

или

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^n u^2(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_i \cdot c_j \cdot \rho_{ij} \cdot u(X_i) \cdot u(X_j)$$

В зависимости от значений коэффициентов c_i поправка на корреляцию (вторая сумма в правой части формулы) может быть со знаком плюс или со знаком минус. В первом случае оценка суммарной неопределенности увеличивается, во втором уменьшается. Если значение ρ_{ij} достаточно близко к единице [25] пренебрежение корреляцией может внести существенную ошибку в оценку неопределенности результата измерения.

Пример 8. Оценить погрешность измерения размера детали в интервале от 50 до 80 мм многооборотной измерительной головкой 2МИГ, устанавливаемой на штативе и настраиваемой с помощью плоскопараллельных концевых мер длины 4 класса точности.

Решение. Исходя из требования, что число плиток в блоке не должно превышать 5 штук, предполагаем, что блок будет состоять из одной

плитки 40,50,60 или 70 мм и не более четырех из интервала до 10 мм. Пределы погрешности плиток, определяемые классом точности $\Delta_{40-70} = 4$ мкм и $\Delta_{до 10} = 2$ мкм.

Предел допустимой погрешности прибора 2 МИГ: $\Delta_{МИГ} = 5$ мкм.

Погрешности плиток и прибора заданы предельными значениями. Для них принимаем распределение по закону равной вероятности. Стандартные неопределенности оцениваются по типу В. Тогда получим:

$$u_{В,40-70} = \Delta_{40-70} / \sqrt{3} = 4 / 1,73 = 2,31 \text{ мкм}, \quad u_{В,0-10} = 2 / \sqrt{3} = 1,15 \text{ мкм}, \\ u_{В,МИГ} = 5 / \sqrt{3} = 2,89 \text{ мкм}.$$

Неопределенности типа А отсутствуют. Найдем суммарную стандартную неопределенность

$$u_C = u_B = \sqrt{u_{В,40-70}^2 + 4 \cdot u_{В,0-10}^2 + u_{В,МИГ}^2} \\ = \sqrt{2,31^2 + 4 \cdot 1,15^2 + 2,89^2} = 4,36 \text{ мкм}$$

Вычисляем расширенную неопределенность в предположении нормального закона распределения. При вероятности 0,95 принимаем коэффициент охвата равным 2. Получим

$$U = k_o \cdot u_C = 2 \cdot 4,36 = 8,72 \text{ мкм}.$$

С учетом рекомендаций по представлению результатов измерений (см. раздел 9) запишем $U = 9$ мкм.

Пример 9 [21]. Силу электрического тока определяют на основе прямых измерений напряжения с помощью вольтметра и токового шунта

Уравнение измерений

$$I = f(V, R) = V/R, \quad ,$$

где I - сила тока, V - напряжение, R - сопротивление шунта.

В результате измерений напряжения при температуре $t = (23,00 \pm 0,05)^\circ\text{C}$ получен ряд оценок значений V_i , мВ ($i = 1, \dots, n; n = 10$): 100,68; 100,83; 100,79; 100,64; 100,63; 100,94; 100,60; 100,68; 100,76; 100,65.

Вычисляем среднее арифметическое значение напряжения

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N V_i = \frac{1}{10} (100,68 + \dots + 100,65) = 100,72 \text{ мВ}$$

Значение сопротивления шунта установлено при его калибровке для

$$I = 10 \text{ А и } t = 23^\circ\text{C и равно: } R_0 = 10,088 \text{ Ом}$$

Находим оценку значения силы тока

$$I = \frac{\bar{V}}{R_0} = \frac{100,72}{10,088} = 9,984 \text{ A}$$

На основе ряда наблюдений значения напряжения определяем стандартную неопределенность по типу А, мВ

$$u_A(\bar{V}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2}{n(n-1)}} =$$

$$\sqrt{\frac{(100,68 - 100,72)^2 + \dots + (100,65 - 100,72)^2}{10(10-1)}} = 3,4 \cdot 10^{-2}$$

Стандартную неопределенность силы тока определяем по формуле (41)

$$u_A(I) = \frac{\partial f}{\partial V} \cdot u_A(\bar{V}) = \frac{1}{R} \cdot u_A(\bar{V}) = \frac{1}{10,088} \cdot 3,4 \cdot 10^{-2} = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

Находим стандартные неопределенности, относимые к типу В. Принимаем равномерный закон распределения.

1. Согласно результатам калибровки погрешность вольтметра зависит от его показания $\Delta = \pm 3 \cdot 10^{-4} \cdot V + 0,02$. Тогда стандартная неопределенность $u_{B,V}$ будет равна

$$u_{B,V} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{V} + 0,02}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 100,72 + 0,02}{\sqrt{3}} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

2. Границы, внутри которых лежит значение сопротивления шунта, определены при калибровке шунта и равны $\pm 7 \cdot 10^{-4} \cdot R$. Тогда при $R=R_0$ найдем

$$u_{B,R} = \frac{7 \cdot 10^{-4} \cdot R_0}{\sqrt{3}} = \frac{7 \cdot 10^{-4} \cdot 10,088}{\sqrt{3}} = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ Ом},$$

3. Границы неопределенности значения сопротивления шунта, обусловленного изменением температуры, равны $\pm \alpha \cdot \Delta t \cdot R_0$. Где $\alpha = 6 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ – температурный коэффициент. При $\Delta t = \pm 0,05^\circ\text{C}$ границы неопределенности значения сопротивления равны

$$\Delta_{R,t} = \alpha \cdot \Delta t \cdot R = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 0,05 \cdot 10,088 = 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}.$$

Стандартная неопределенность

$$u_{B,t} = \frac{A_{R,t}}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}} = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ Ом.}$$

Стандартная неопределенность $u_{B,I}$ в соответствии с формулой (40)

$$\begin{aligned} u_{B,I} &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 \cdot u_{B,V}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot (u_{B,R}^2 + u_{B,t}^2)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{R_0}\right)^2 \cdot u_{B,V}^2 + \left(\frac{V}{R^2}\right)^2 \cdot (u_{B,R}^2 + u_{B,t}^2)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{10,088}\right)^2 \cdot (2,9 \cdot 10^{-2})^2 + \left(\frac{100,72}{10,088^2}\right)^2 \cdot [(4,0 \cdot 10^{-6})^2 + (1,7 \cdot 10^{-6})^2]} \\ &= 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ А} \end{aligned}$$

Вычисляем суммарную стандартную неопределенность

$$u_c(I) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{(3,4 \cdot 10^{-3})^2 + (5,0 \cdot 10^{-3})^2} = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ А}$$

Для определения эффективного числа степеней свободы ν_{eff} используем формулу (55)

$$\begin{aligned} \nu_{eff} &= \frac{u_c^4}{\frac{\left[\frac{1}{R} \cdot u_A(\bar{V})\right]^4}{n-1} + \frac{\left(\frac{1}{R} \cdot u_{B,V}\right)^4}{\infty} + \frac{\left(\frac{V}{R^2} \cdot u_{B,R}\right)^4}{\infty} + \frac{\left(\frac{V}{R^2} \cdot u_{B,t}\right)^4}{\infty}} \\ &= \frac{(6,0 \cdot 10^{-3})^4}{\frac{\left(\frac{1}{10,088} \cdot 6,0 \cdot 10^{-3}\right)^4}{10-1} + \frac{\left(\frac{1}{10,088} \cdot 2,9 \cdot 10^{-2}\right)^4}{\infty} + \frac{\left(\frac{100,72}{10,088^2}\right)^4 [(4 \cdot 10^{-6})^2 + (1,7 \cdot 10^{-6})^2]}{\infty}} = 87 \end{aligned}$$

При полученном числе степеней свободы и доверительной вероятности 0,95 коэффициент охвата k_o равен (таблица 2)

$$k_o = t_P(\nu_{eff}) = t_{0,95}(87) = 1,99$$

Расширенная неопределенность

$$U_{0,95}(I) = k_o \cdot u_c(I) = 1,99 \cdot 6,0 \cdot 10^{-3} = 0,012 \text{ А}$$

Запишем результат измерения: $I = 9,984 \text{ А}$, $U = 0,012 \text{ А}$, $k_o = 2$, $P = 0,95$.

Вычисление характеристик погрешности результата измерений.

Для сравнения и ознакомления с реализацией на практике ниже приведено решение рассмотренной задачи в терминах погрешности измерений

Вычисляем СКО, характеризующие случайную составляющую погрешности при измерениях напряжения, мВ

$$S(\bar{V}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2}{n(n-1)}} =$$

$$\sqrt{\frac{(100,68 - 100,72)^2 + \dots + (100,65 - 100,72)^2}{10(10-1)}} = 3,4 \cdot 10^{-2}$$

Границы неисключенной систематической погрешности вольтметра определены при его калибровке в виде следующего выражения (в выражениях для границ погрешностей при разных значениях отклонений от нуля будем опускать знак \pm):

$$\begin{aligned} \theta_V &= 3 \cdot 10^{-4} \cdot V + 0,02 = 3 \cdot 10^{-4} \cdot 100,72 + 0,02 = \\ &= 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ мВ} \end{aligned}$$

Границы неисключенной систематической относительной погрешности значения сопротивления шунта, определенные при его калибровке, равны $\delta_R = 0,07\%$. Значение абсолютной погрешности

$$\theta_R = \delta \cdot R_0 \div 100\% = 7 \cdot 10^{-4} \cdot R_0 = 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}$$

Погрешность измерения температуры равна $\Delta t = \pm 0,05^\circ\text{С}$. Находим связанные с ней границы неисключенной систематической составляющей погрешности значения сопротивления шунта

$$\theta_{R,t} = \alpha \cdot \Delta t \cdot R_0 = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 0,05 \cdot 10,088 = 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}$$

Предполагаем равномерный закон распределения неисключенных систематических составляющих погрешности результата измерений. Тогда СКО суммарной неисключенной систематической составляющей погрешности результата измерений силы тока будет равно

$$S_{\theta} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 \cdot \frac{\theta_V^2}{3} + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot \frac{\theta_R^2}{3} + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot \frac{\theta_{R,t}^2}{3}}$$

После подстановки получим

$$S_{\theta} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \cdot \frac{\theta_V^2}{3} + \left(\frac{\bar{V}}{R^2}\right)^2 \cdot \frac{\theta_R^2 + \theta_{R,t}^2}{3}} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{10,088}\right)^2 \frac{(5,0 \cdot 10^{-2})^2}{3} + \left(\frac{100,72}{10,088^2}\right)^2 \frac{(7,1 \cdot 10^{-6})^2 + (3 \cdot 10^{-6})^2}{3}}$$

$$= 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ A,}$$

Найдем границы суммарной неисключенной систематической составляющей погрешности результата измерений силы тока при доверительной вероятности $P = 0,95$

$$\theta(0,95) = 1,1 \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \cdot \theta_V^2 + \left(\frac{\bar{V}}{R^2}\right)^2 \cdot (\theta_R^2 + \theta_{R,t}^2)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{10,088}\right)^2 \cdot (5,0 \cdot 10^{-2})^2 + \left(\frac{100,72}{10,088^2}\right)^2 \cdot (7,1 \cdot 10^{-6})^2 + (3 \cdot 10^{-6})^2}$$

$$= 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

СКО случайной составляющей погрешности результата измерений силы тока S равно

$$S = \frac{\partial f}{\partial V} \cdot S(\bar{V}) = \frac{1}{R} \cdot S(\bar{V}) = \frac{1}{10,088} \cdot 3,4 \cdot 10^{-2} = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ A,}$$

Вычислим СКО суммарной погрешности результата измерений силы тока

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S^2 + S_{\theta}^2} = \sqrt{(3,4 \cdot 10^{-3})^2 + (5,0 \cdot 10^{-3})^2} = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

Доверительные границы погрешности результата измерений силы тока при $P = 0,95$ и эффективном числе степеней свободы $f_{\text{эфф}} = n - 1 = 9$

$$\Delta_{0,95} = \frac{t_{0,95}(9) \cdot S + \theta(0,95)}{S + S_{\theta}} \cdot S_{\Sigma} = \frac{2,262 \cdot 3,4 \cdot 10^{-2} + 9,5 \cdot 10^{-3}}{3,4 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}} = 0,012 \text{ A}$$

Результат измерения $I = (9,984 \pm 0,012) \text{ A, } P = 0,95.$

В некоторых случаях для характеристики результата косвенного измерения используют максимально гарантированное значение погрешности - так называемый предел погрешности

$$\Delta(Y) = \pm \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta(X_i) \right| \quad (44)$$

где $\Delta(X_i)$ - предел погрешности оценки значения величины X_i .

Пример10. Выбрать более точный способ получения значения сопротивления электрической цепи (прямое или косвенное измерение) с помощью измерительных приборов, характеризуемых приведенной погрешностью.

Омметр $R_{max} = 150$ Ом класс точности 1,5

Вольтметр $U_{max} = 300$ В класс точности 2,0

Амперметр $I_{max} = 25$ А класс точности 2,5.

Числовые значения характеризуют наибольшее значение величины на шкале прибора.

Параметры электрической цепи $U=180$ В, $I=10$ А, $R=18$ Ом.

Находим предел допустимой погрешности омметра

$$\Delta_R = 1,5 \cdot 150 / 100\% = 2,25 \text{ Ом}.$$

Исходя из соотношения $R=U/I$, предел погрешности косвенных измерений вычисляем по формуле (56)

$$\Delta'_R = \pm \left(\frac{\partial R}{\partial U} \Delta_U + \frac{\partial R}{\partial I} \Delta_I \right) = \pm \left(\frac{1}{I} \Delta_U + \frac{U}{I^2} \Delta_I \right)$$

где Δ_U и Δ_I - пределы допустимых погрешностей измерений вольтметра и амперметра

$$\Delta_U = \pm (2 \cdot 300 / 100) = \pm 6 \text{ В}$$

$$\Delta_I = \pm (2,5 \cdot 25 / 100) = \pm 0,625 \text{ А}$$

Тогда получим

$$\Delta'_R = \pm \left(\frac{6}{10} + \frac{180}{10^2} \cdot 0,625 \right) = \pm 1,725 \text{ Ом}$$

Так как $\Delta_R > \Delta'_R$, делаем вывод, что более точным является результат косвенных измерений.

9. Способы представления результатов измерений

Результат измерения (величины) – множество значений величины, приписываемых измеряемой величине вместе с любой другой доступной и существенной информацией [20].

При записи результата измерений указывают оценку значения величины и характеристики погрешности/неопределенности измерений (далее - характеристики точности измерений), другую информацию, относящуюся к измерениям в зависимости от варианта его (результата) дальнейшего использования.

Характеристики точности измерений могут быть представлены в единицах измеряемой величины (абсолютные) или в процентах (относительные). Наименьшие разряды числовых значений результатов измерений принимают такими же, как и наименьшие разряды числовых значений абсолютных характеристик точности измерений.

Правила ПМГ 96 – 2009 «ГСИ. Результаты и характеристики качества измерений. Формы представления» устанавливают следующие характеристики точности измерений:

- среднеквадратичное отклонение погрешности измерений или стандартную неопределенность измерений (точечные характеристики качества измерений);

- границы интервала, в котором погрешность измерений находится с заданной вероятностью, или расширенную неопределенность измерений (интервальные характеристики качества измерений).

Математическое ожидание погрешности/неопределенности измерений не рассматривают в качестве характеристики погрешности/неопределенности измерений, так как оно представляет собой систематическую погрешность, и если ее значение известно, то в результат измерений вводят поправку.

Если результаты измерений используют (или предполагают, что могут быть использованы) совместно с другими результатами измерений или при расчетах значений величин, функционально связанных с результатами измерений (например, при косвенных измерениях), точность измерений определяют, в основном,

точечными характеристиками – среднеквадратическим отклонением погрешности или стандартной неопределенностью.

В случаях, когда результаты измерений являются окончательными и не предназначаются для совместного использования с другими результатами измерений и для расчетов, применяют интервальные характеристики – указывают границы, в пределах которых находится погрешность с заданной вероятностью, или значение расширенной неопределенности.

Характеристики точности измерений представляют числом, содержащим не более двух значащих цифр. Для промежуточных результатов расчета рекомендуется сохранять третью значащую цифру. При записи окончательного результата третью значащую цифру округляют в большую сторону. Допускается характеристики погрешности/неопределенности представлять числом, содержащим одну значащую цифру. В этом случае вторую значащую цифру округляют в большую сторону, если цифра последующего незначащего младшего разряда равна или больше пяти, или в меньшую сторону, если эта цифра меньше пяти.

Результат измерений представляют именованным или неименованным числом.

Пример - 100 кВт; 20 °С - именованные числа; 0,44; 2,765 - неименованные числа.

При одинаковых числовых значениях (без учета знаков) нижних и верхних границ интервальных характеристик точности измерений указывают одно числовое значение.

Пример. Результат измерений: Расход жидкости $Q = 10,75 \text{ м}^3/\text{с}$; $\Delta = 0,15 \text{ м}^3/\text{с}$; $P = 0,95$.

В противном случае границы указывают отдельно каждую со своим знаком.

Пример. Результат измерений: Расход жидкости $Q = 10,75 \text{ м}^3/\text{с}$; $\Delta_l = - 0,13$, $\Delta_h = + 0,15 \text{ м}^3/\text{с}$ (здесь индексами l и h обозначены нижняя и верхняя границы погрешности); $P = 0,95$.

Допускается представление результата измерений доверительным интервалом, покрывающим с известной (указываемой) доверительной вероятностью истинное значение

измеряемой величины. В этом случае статистические оценки характеристик погрешности/неопределенности измерений отдельно не указывают.

Пример. Значение измеряемого расхода Q – в интервале от 10,50 до 11,00 м³/с с доверительной вероятностью 0,95.

При необходимости результат измерений сопровождают дополнительной информацией об условиях получения измерительной информации. Например, указывают: частотные спектры измеряемой величины или диапазон скоростей ее изменения; диапазоны значений величин, существенно влияющих на погрешность измерений (средств измерений).

Пример. Расход жидкости 10,75 м³/с; $u_c=0,10$ м³/с. Условия измерений: температура жидкости 20°C, кинематическая вязкость $1,5 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Представление результатов измерений, полученных как среднее арифметическое значение результатов многократных наблюдений, сопровождают указанием числа наблюдений и интервала времени, в течение которого они проведены. Если измерения проводят по методике, установленной в каком-либо документе, вместо указания числа наблюдений и интервала времени допускается ссылка на этот документ.

Пример. Температура $T=263,7^\circ\text{C}$. Число наблюдений – 50, в течении 45 мин. Характеристики качества и условия измерений – в соответствии со свидетельством об аттестации МВИ № 13 от 23.1.2003 г.

Примеры обозначений также были приведены ранее при решении задач.

При оформлении результатов измерений, связанных с международными работами (международные сличения эталонов, поверка или калибровка средств измерений для зарубежных стран), а также с исследованиями первичных государственных эталонов, для характеристики точности измерений следует использовать параметры неопределенности (стандартную неопределенность, суммарную стандартную неопределенность и расширенную неопределенность) в соответствии с международной рекомендацией [24].

Для подробного описания того, как были получены результат измерения и его неопределенность, необходимо [24]:

а) ясно отразить методы, используемые для вычисления результата измерения и его неопределенности;

б) перечислить все составляющие неопределенностей и полностью задокументировать, как они оценивались;

в) представить анализ данных таким образом, чтобы можно было легко, в случае необходимости, независимо повторить вычисления сообщаемого результата;

г) дать все поправки и константы, используемые в анализе, и их источники.

Исходя из перечисленных требований, результат измерения должен содержать:

а) значения каждой входной оценки x_i и ее стандартной неопределенности $u(X_i)$ вместе с описанием того, как они были получены;

б) оцененные ковариации и коэффициенты корреляции (а лучше и те, и другие) для всех коррелированных входных оценок и методы, использованные для их получения;

в) степени свободы для стандартной неопределенности каждой входной оценки и то, как они были получены;

г) функциональную зависимость $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, и, в случае необходимости, частные производные или коэффициенты чувствительности $\partial f/\partial x_i$. (Коэффициенты, определенные экспериментально, указывают обязательно).

Для технических измерений подробный отчет о неопределенности, как правило, не требуется. Поэтому результат измерений содержит сведения о расширенной неопределенности или суммарной стандартной неопределенности.

Примеры записи результатов для таких случаев (см. также [24]).

Пример. Когда мерой неопределенности является расширенная неопределенность U : «Масса $m = (100,02147 \pm 0,00079)$ г. Число, следующее за знаком \pm , является значением расширенной неопределенности $U = k \cdot u_c$. Суммарная стандартная неопределенность $u_c = 35$ мг. Коэффициент охвата $k = 2,26$ принят на основе t – распределения для числа степеней свободы $\nu = 9$ и при уровне доверия 95 процентов».

Пример. Если мера неопределенности - u_c , :

Вариант 1: «Масса $m = 100,02147$ г с суммарной стандартной неопределенностью $u_c = 0,35$ мг;

Вариант 2: «Масса $m = (100,02147 \pm 0,00035)$ г, где число, следующее за знаком \pm , является численным значением u_c , а не доверительным интервалом.

10. Методики измерений

Согласно ст.5 ФЗ №102 «Об обеспечении единства измерений», измерения, относящиеся к сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений, должны выполняться по *аттестованным* методикам (методам) измерений. Методики измерений разрабатывают и применяют также и вне сферы государственного регулирования.

Методика (выполнения) измерений (далее, сокращенно, МИ или МВИ) - установленная логическая последовательность операций и правил при измерении, выполнение которых обеспечивает получение результатов измерений в соответствии с принятым методом измерений.

Необходимость разработки МИ обуславливается частотой повторения измерений, значимостью их результатов, сложностью измерений и обработки их результатов. Обычно методика измерений регламентируется каким-либо *нормативно-техническим документом*.

Для измерений с помощью простых показывающих приборов (давления с помощью манометров, электрических величин щитовыми приборами, линейно-угловых и многих других величин) предоставление отдельного документа на МИ не требуется.

В этих случаях достаточно лишь указания типов и основных метрологических характеристик средств измерений в конструкторской, технологической или проектной документации.

Такое же положение имеет место при выполнении многих измерений с помощью автоматических или автоматизированных средств измерений (информационно – измерительных систем, измерительно-вычислительных комплексов, информационной подсистемы АСУ технологическими процессами и т.п.). МИ с применением таких устройств содержатся в алгоритмах и

программном обеспечении. При испытаниях с целью утверждения типа средств измерений алгоритмы и программы апробируются.

В соответствии с Законом РФ «Об обеспечении единства измерений» методики (выполнения) измерений, предназначенные для выполнения прямых измерений, должны вноситься в эксплуатационную документацию на средства измерений.

Общие требования и положения в части разработки, оформления, содержания, аттестации, стандартизации и метрологического надзора за МИ определены ГОСТ Р 8.563 [7], ГОСТ 8.010- 2013 [26], МИ 2377 – 98 [14] и МИ 3269 – 2010 [13].

Схема процедуры разработки МИ, включающая экспертизу, аттестацию, стандартизацию МИ, в общем виде показана на рисунке 3.



Рис. 3. Процедура разработки методики измерений

Разработка МИ производится метрологическими службами предприятий и организаций на основе исходных данных, которые могут быть приведены в техническом задании, технических условиях и других документах.

К исходным данным относятся:

- область применения (объект измерений, в т.ч. наименование продукции и контролируемых параметров, а также область использования - для одного предприятия, для сети лабораторий и т.п.);
- наименование измеряемой величины и пределы её измерений;
- требования к показателям точности измерений;
- требования к условиям выполнения измерений;
- характеристики объекта измерений, если они могут влиять на точность измерений (выходное сопротивление, жесткость в месте контакта с датчиком, состав пробы и т.п.);
- при необходимости другие требования к методике измерений.

Требования к точности измерений приводят путем задания показателей точности (характеристик погрешности или неопределенности измерений) и ссылки на документы, в которых эти значения установлены.

Дополнительно могут потребоваться следующие сведения:

- вид индикации и формы регистрации результатов измерений;
- требования к автоматизации измерительных процедур;
- требования к обеспечению безопасности выполнения работ.
- о наличии средств измерений, в том числе утвержденных типов;
- о наличии других технических средств, в том числе средств вычислительной техники, которые могут быть использованы при измерениях;
- о наличии эталонов, стандартных образцов состава и свойств веществ и материалов, аттестованных смесей для поверки (калибровки) средств измерений, которые могут быть использованы в МИ;

- о квалификации операторов, выполняющих измерения;
- другие данные в соответствии со спецификой МИ.

При разработке МИ одним из основных исходных требований является обеспечение точности измерений. В ряде нормативных документов приводятся требования к точности измерений в наиболее распространенных технологических процессах. Однако часто такие требования в явном виде отсутствуют и их необходимо установить, исходя из требований к достоверности измерительного контроля или погрешности результатов испытаний, требований к другим результатам реализации информационных и управляющих функций системы управления (например, к точности вычисления технико-экономических показателей) или к самому объекту контроля (см. раздел 1).

При разработке МИ опираются на рекомендации МИ 1967-89 «ГСИ. Выбор методов и средств измерений при разработке методик выполнения измерений. Общие положения». Для намеченного средства измерений определяют характеристики погрешности/неопределенности измерений, используя расчетные, экспериментальные или расчетно-экспериментальные методы.

Для расчета характеристик погрешности/неопределенности в общем случае используют:

- метрологические характеристики средств измерений, нормированные по ГОСТ 8.009;
- характеристики влияющих величин, определяющие условия измерений, в частности, условия применения средств измерений;
- характеристики объекта измерений, влияющие на погрешность измерений.

Результатом разработки является документ на методику измерений, состоящий из вводной части и следующих разделов:

- ✓ требования к показателям точности измерений или приписанные характеристики показателей точности измерений;
- ✓ средства измерений, вспомогательные устройства, материалы, растворы;
- ✓ метод (методы) измерений;
- ✓ требования безопасности, охраны окружающей среды;

- ✓ требования к квалификации операторов;
- ✓ условия измерений;
- ✓ подготовка к выполнению измерений;
- ✓ выполнение измерений;
- ✓ обработка (вычисление) результатов измерений;
- ✓ оформление результатов измерений;
- ✓ контроль точности результатов измерений.

Состав разделов можно корректировать исключением, объединением и дополнением разделов.

Краткая характеристика содержания разделов (подробнее - см. книгу [7]).

Во вводной части приводят информацию о назначении и области применения документа на методику измерений.

Раздел «Требования к показателям точности измерений» содержит числовые значения показателей точности измерений и ссылку на документ, в котором они приведены.

Раздел «Средства измерений, вспомогательные устройства и материалы» должен включать перечень всех средств измерений, вспомогательных устройств, материалов, реактивов, применяемых при выполнении измерений. В разделе приводят метрологические характеристики средств измерений и стандартных образцов, технические характеристики вспомогательных устройств и качественные характеристики материалов и реактивов с обозначением документов, в соответствии с которыми их выпускают (для методик измерений в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений указывают типы средств измерений и стандартных образцов).

В разделе «Метод измерений» приводят описание приемов сравнения измеряемой величины с единицей в соответствии с принципом, положенным в основу метода. Если для измерений одной величины применяют несколько методов или документ устанавливает методики измерений двух или нескольких величин, то описание каждого метода выделяют в отдельный подраздел.

Раздел «Требования безопасности, охраны окружающей среды» содержит требования, выполнение которых обеспечивает при выполнении измерений безопасность труда, нормы производственной санитарии и охрану окружающей среды. При наличии нормативных документов, регламентирующих требования безопасности, производственной

санитарии и охраны окружающей среды в разделе приводят ссылку на эти документы.

Требования безопасности устанавливают для методики измерений, если ее реализация связана с риском реальной или потенциальной опасности для жизни, здоровья человека, возможностью нанесения материального ущерба и/или ущерба окружающей среде.

Раздел «Требования к квалификации операторов» содержит сведения об уровне квалификации (профессии, образовании, производственном опыте и др.) лиц, допускаемых к выполнению измерений. Этот раздел включают в документ на методику измерений при использовании сложных неавтоматизированных методов измерений и процедур обработки их результатов.

В разделе «Условия измерений» приводят перечень влияющих величин, их номинальных значений и (или) границ диапазонов возможных значений, а также другие характеристики влияющих величин, требования к объекту измерений. К числу влияющих величин относят параметры сред (образцов), напряжение и частоту тока питания, внутренние импедансы объектов измерений и другие характеристики.

В раздел «Подготовка к выполнению измерений» включают описание подготовительных работ, которые проводят перед выполнением непосредственно измерений. К этим работам относят предварительное определение значений влияющих величин, сборку схем, подготовку и проверку режимов работы средств измерений и других технических средств (установка нуля, выдержка во включенном состоянии, тестирование и т.п.), подготовку проб к измерениям.

Раздел «Выполнение измерений» содержит перечень, объем, последовательность операций, периодичность и число измерений, описание операций, требования к представлению промежуточных и конечных результатов (число значащих цифр и др.).

В разделе «Обработка (вычисление) результатов измерений» приводят описание способов обработки и получения результатов измерений. Если способы обработки результатов измерений установлены в других документах, в разделе приводят ссылки на эти документы.

Раздел «Оформление результатов измерений» содержит требования к форме, в которой приводят полученные результаты измерений. В разделе указывают вид носителя измерительной информации (документ, магнитная лента, лента самопишущего прибора и т.п.). При необходимости приводят сведения о применяемых средствах измерений и других технических средствах, дате и времени получения результата измерений.

В разделе «Контроль точности результатов измерений» указывают сведения о контролируемых параметрах, средствах, процедурах, нормативах контроля, а также приводят рекомендации по периодичности контроля. Отдельные процедуры, например приготовление образцов для контроля точности, могут быть описаны в приложении к документу на методику измерений.

Методики (выполнения) измерений, относящиеся к сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений, подлежат обязательной аттестации на соответствие обязательным метрологическим требованиям к измерениям. Порядок аттестации таких методик (методов) измерений и их применения устанавливается федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по выработке государственной политики и нормативно-правовому регулированию в области обеспечения единства измерений (Министерством промышленности и торговли).

Методики измерений, используемые вне указанной сферы, аттестуют в порядке, установленном в ведомстве или на предприятии.

Организации и предприятия должны иметь перечни документов на методики измерений, применяемые в данной организации и на данном предприятии, если они относятся к сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений.

Аттестация методик измерений – исследование и подтверждение соответствия методик (методов) измерений установленным метрологическим требованиям к измерениям.

При аттестации методик измерений проводят исследование и подтверждение соответствия:

- методик измерений их целевому назначению, т.е. соответствие предлагаемой методики свойствам объекта измерений и характеру измеряемых величин;
- условий выполнения измерений требованиям к применению данной методики измерений;
- показателей точности результатов измерений и способов обеспечения достоверности измерений установленным метрологическим требованиям;

- используемых в составе методики измерений средств измерений, стандартных образцов условиям обеспечения прослеживаемости результатов измерений к государственным первичным эталонам, а в случае отсутствия соответствующих государственных первичных эталонов, к национальным эталонам иностранных государств;

- записи результатов измерений требованиям к единицам измерений, допущенным к применению в Российской Федерации;

- форм представления результатов измерений метрологическим требованиям.

Аттестацию МИ осуществляют метрологические службы и иные организационные структуры по обеспечению единства измерений предприятий (организаций), разрабатывающих или применяющих МИ.

В сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений аттестацию методик (методов) измерений проводят аккредитованные в установленном порядке в области обеспечения единства измерений юридические лица и индивидуальные предприниматели.

Аттестацию МИ осуществляют на основе результатов метрологической экспертизы материалов разработки МИ и документа, регламентирующего МИ, и теоретического и экспериментального исследований МИ. При положительных результатах оформляется свидетельство об аттестации МИ.

В практику работы метрологических служб в последние годы вошло понятие «референтная методика измерений».

Референтная методика измерений – методика измерений, принятая для получения результатов измерений, которые могут быть использованы для оценки правильности измеренных значений величины, полученных по другим методикам измерений величин того же рода, а также для калибровки или для определения характеристик стандартных образцов.

Литература

- 1.ГОСТ Р ИСО 10576-1-2006 Статистические методы. Руководство по оценке соответствия установленным требованиям. Часть 1. Общие принципы. - М.: Стандартиформ, 2006.
- 2.Артемов Б.Г. Справочное пособие для специалистов метрологических служб. – М.: Изд-во стандартов, 2009.
- 3.Бромберг Э.М., Куликовский К.Л. Тестовые методы повышения точности измерений. – М.: Энергия, 1978.
- 4.Бурдун Г. Д., Марков Б.Н. Основы метрологии. - М.: Изд-во стандартов, 1984.
- 5.Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
- 6.ГОСТ 8.401- 80 ГСИ. Классы точности средств измерений. Общие требования.
- 7.ГОСТ Р 8.563-2009 ГСИ. Методики (методы) измерений.
- 8.Гвоздев В.Д. Прикладная метрология: Величины и измерения. Учебное пособие. – М.: МИИТ, 2011.
- 9.Кузнецов В.А. и др. Метрология (теоретические, прикладные и законодательные основы). – Изд-во стандартов, 1998.
- 10.ПМГ 96 – 2009 ГСИ. Результаты и характеристики качества измерений. Формы представления.
- 11.МИ 1967 – 89 ГСИ. Выбор методов и средств измерений при разработке методик выполнения измерений. Общие положения.
12. Гвоздев В.Д. Измерения однократные и многократные: критерий ничтожной погрешности. – «Законодательная и прикладная метрология», 2012, №2.
- 13.МИ 3269 – 20010 ГСИ. Построение, изложение, оформление и содержание документов на методики (методы) измерений.
- 14.МИ 2377 – 98 ГСИ. Разработка и аттестация методик выполнения измерений.
- 15.Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
- 16.Пронкин Н.С. Основы метрологии: практикум по метрологии и измерениям. Учебное пособие для вузов. – М.: Логос. Университетская книга, 2007.
- 17.Р 50.2.038 – 2004 «ГСИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешности и неопределённости результата измерений». – ИПК Издательство стандартов, 2003.
- 18.РД 50-98-86 «Методические указания. Выбор универсальных средств измерений линейных размеров до 500 мм».

- 19.ГОСТ Р 8.736 – 2011 ГСИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения.
- 20.РМГ 29-2013 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения. – М.: Стандартиформ, 2014.
- 21.ГОСТ Р 54500.1 - 2011 Неопределенность измерения. Часть 1. Введение в руководства по неопределенности измерения. - М.: Стандартиформ, 2012.
- 22.РМГ 64 - -2003 ГСИ. Обеспечение эффективности измерений при управлении технологическими процессами. Методы и способы повышения точности измерений.
- 23.Шишкин И.Ф. Теоретическая метрология. Часть 1. Общая теория измерений: Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2010.
- 24.Руководство по выражению неопределенности измерения. /Перевод с английского под ред. В.А. Слаева. – СПб.:ВНИИМ, 1999.
- 25.Селиванов М.Н. и др. Качество измерений: Метрологическая справочная книга. – М.: Лениздат, 1987.
- 26.ГОСТ 8.010- 2013 ГСИ. Методики выполнения измерений. Общие положения.

Содержание

1.Определение допустимой погрешности (расширенной неопределенности) измерений.....	3
2.Выбор метода и средства измерений.....	10
3.Оценка погрешности (неопределенности) результата однократного измерения.....	12
4.Основные способы повышения точности измерений	23
5.Создание условий для измерений.....	25
6.Многократные измерения.....	26
7.Подготовка оператора.....	39
8.Математические действия с результатами измерений. Определение результата косвенных измерений	41
9.Способы представления результатов измерений.....	58
10.Методики измерений.....	62
Литература.....	70