ФГБ ОУ ВПО
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

Кафедра «Высшая математика»

Н.А. Корниенко, Н.Н. Субоч

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Рекомендовано редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия для студентов
ИТТСУ

Москва - 2011

УДК 511.24
К 66

Корниенко Н.А., Субоч Н.Н. Комплексные числа. Сборник задач. - М.: МИИТ. 2011. - 27 с.

Сборник задач по теме «Комплексные числа» содержит необходимые теоретические сведения, относящиеся к данному разделу курса высшей математики, подробно рассмотрено решение типовых примеров. Сборник задач предназначен для студентов 2 курса технических специальностей ИТТСУ МИИТа. Состоит из задач по 30 вариантов в каждой.

Рецензенты:
доцент кафедры «Прикладная математика» МИРЭА, к.ф.-м.наук А.А. Воронцов

доцент каф. «Прикладная математика-1» МИИТа, к.ф.-м.наук. Е.В. Родина

Для самостоятельного изучения теоретических вопросов, относящихся к теме «Комплексные числа», рекомендуются учебники и пособия, имеющиеся в библиотеке и читальных залах МИИТа в свободном доступе:

1. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. 9-е изд. - М.: Физматлит, 2002.- 799с.: ил.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2-х ч. Ч.II: Учебное пособие для вузов.-6-е изд., испр.- М.: ОНИКС 21 век. Мир и образование, 2003. – 304 с.: ил.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗОВ в 2-х т. Т.1. изд. Стереотип.- М.: Интеграл-Пресс, 2001. – 456 с.: ил.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике.- М.: Айрис-Пресс, 2005.- 256 с.: ил.

5. Шипачёв В.С. Высшая математика.- 5-е изд. М.: Высшая школа, 2000. – 479с.: ил.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Решение уравнений……………………….5
Задача1……………………………………...6
2. Понятие комплексного числа………………..7
Алгебраическая форма комплексного числа 7
Геометрическое изображение комплексных чисел……………………………………………...8
Тригонометрическая форма записи комплексного числа…………………………...9
Показательная форма записи комплексного числа……………………………………………….11
Задача 2…………………………………….16
3. Основные действия над комплексными числами в алгебраической форме…………..17
Задача 3…………………………………….19
4. Возведение в степень……………………….20
Задача 4…………………………………….21
5. Извлечение корня………………………….22
Задача 5…………………………………….24

1. Решение уравнений

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ в случае, когда его дискриминант $D=b^2-4ac$ отрицателен, не имеет действительных корней. В этом случае уравнение имеет два комплексных сопряженных корня. По известной формуле находим $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Считая, что D<0 и полагая $D=-d^2$ (d>0), получим $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{-d^2}}{2a}$.

Но $\sqrt{-d^2}=\sqrt{d^2\cdot(-1)}=\sqrt{d^2}\cdot\sqrt{-1}=\pm di$.

Следовательно, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm di}{2a}=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{d}{2a}i$. **(1)**

Пример. Решить уравнение $x^2+3x+3=0$.

Для начала необходимо определить дискриминант: $D=9-12=-3$.

По формуле (1) найдем корни уравнения

$$x_1=\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad x_2=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Задача 1

Решить квадратное уравнение:

1. $x^2 - 2x + 17 = 0$

2. $2x^2 + 2x + 1 = 0$

3. $4x^2 - 4x + 17 = 0$

4. $x^2 + 6x + 25 = 0$

5. $4x^2 - 20x + 29 = 0$

6. $9x^2 - 6x + 2 = 0$

7. $x^2 - 4x + 29 = 0$

8. $2x^2 - 2x + 5 = 0$

9. $4x^2 + 4x + 5 = 0$

10. $x^2 - 4x + 13 = 0$

11. $9x^2 - 6x + 17 = 0$

12. $4x^2 - 12x + 25 = 0$

13. $x^2 + 4x + 5 = 0$

14. $2x^2 - 10x + 17 = 0$

15. $x^2 - 6x + 13 = 0$

16. $x^2 + 6x + 18 = 0$

17. $x^2 - 4x + 40 = 0$

18. $4x^2 - 12x + 13 = 0$

19. $2x^2 + 6x + 5 = 0$

20. $x^2 - 2x + 5 = 0$

21. $9x^2 - 6x + 10 = 0$

22. $2x^2 + 6x + 5 = 0$

23. $x^2 + 6x + 13 = 0$

24. $2x^2 - 6x + 17 = 0$

25. $9x^2 - 6x + 2 = 0$

26. $x^2 - 6x + 10 = 0$

27. $x^2 + 2x + 26 = 0$

28. $2x^2 + 6x + 9 = 0$

29. $2x^2 + 10x + 13 = 0$

30. $x^2 - 6x + 34 = 0$

2. Понятие комплексного числа

Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел (x,y). Таким образом, $z=(x,y)$.

Комплексное число можно записать выражением

$$z = x + iy, \qquad \textbf{(2)}$$

где x, y – действительные числа;

i – мнимая единица, определяемая равенством

$$i=\sqrt{-1} \text{ или } i^2=-1.$$

Обозначение i для мнимой единицы ввел в 1777 году Эйлер.

В обозначении комплексного числа:
x – действительная часть ($x = \operatorname{Re} Z$ - по начальным буквам латинского слова realis (действительный), а y – мнимая часть ($y = \operatorname{Im} Z$ - от латинского слова imaginarius (мнимый)) комплексного числа z.

Выражение **(2)** является **алгебраической формой** записи комплексного числа. Отметим частные случаи:

1. Если $x=0$, то $z=iy$ - число называется чисто мнимым;
2. Если $y=0$, то $z=x$ - отождествляется с действительным числом;
3. Комплексное число z равно нулю:

$$z = x + iy = 0,$$

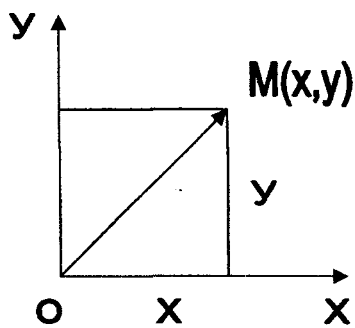
тогда и только тогда, когда $x=0$ и $y=0$.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Выберем на плоскости XOY систему прямоугольных декартовых координат.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить на плоскости XOY в виде точки M(x,y) с координатами x и y. Верно и обратное, каждой точке плоскости соответствует комплексное число. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется **плоскостью комплексного переменного z.**

Точкам плоскости комплексного переменного z, лежащим на оси OX, соответствуют действительные числа (y=0). Точки лежащие на оси OY, изображают чисто мнимые числа, так как в этом случае x=0. Поэтому при изображении комплексных чисел на плоскости комплексного переменного z ось OX называют действительной осью, а ось OY – осью мнимых чисел.

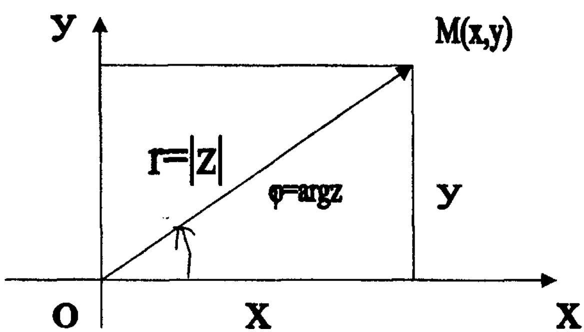


Соединив точку M(x,y) с началом координат, получим вектор $\overline{OM}$. В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением комплексного числа $z = x + iy$ вектор $\overline{OM}$, проекции которого на оси OX и OY соответственно равны x и y.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Введем на комплексной плоскости XOY полярную систему координат, совместив полярную ось с действительной осью OX, а полюс – с началом координат 0(0;0). Рассмотрим комплексное число $z = x + iy$.

Обозначим через φ и r ($r \geq 0$) полярные координаты точки M(x,y).



Принимая во внимание формулы, связывающие полярные и декартовые координаты:

$$x = r\cos\varphi\,;\ \ y = r\sin\varphi\,,$$

можно представить комплексное число z в форме

$$x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$

или $$z = r\left(\cos\varphi + r\sin\varphi\right). \qquad (3)$$

Выражение, стоящее справа, называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа z.

Полярный радиус точки M, т.е. ее расстояние от полюса, называется **модулем** комплексного числа и обозначается символом |z|:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Полярный угол точки M называется **аргументом** комплексного числа z и обозначается символом φ = Argz.

Аргумент комплексного числа считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси OX против хода часовой стрелки, и отрицательным при противоположном направлении отсчета.

Значение аргумента, которое удовлетворяет неравенствам $-\pi<\varphi\leq\pi$, называется **главным** и обозначается φ = arg z.

Для всех остальных значений аргумента z справедливо равенство

$$Argz = \arg z + 2\pi k\,,\ \ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

Следует отметить, что для z=0 аргумент не определен.

Аргумент z можно определить по формуле

$$\arg z = arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Полярный угол можно вычислить, используя формулы:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Показательная форма записи комплексного числа

Показательной функцией с мнимым показателем степени называется комплексная функция

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad \textbf{(4)}$$

где: параметр φ может принимать любые действительные значения.

Формула (3) называется **формулой Эйлера**.

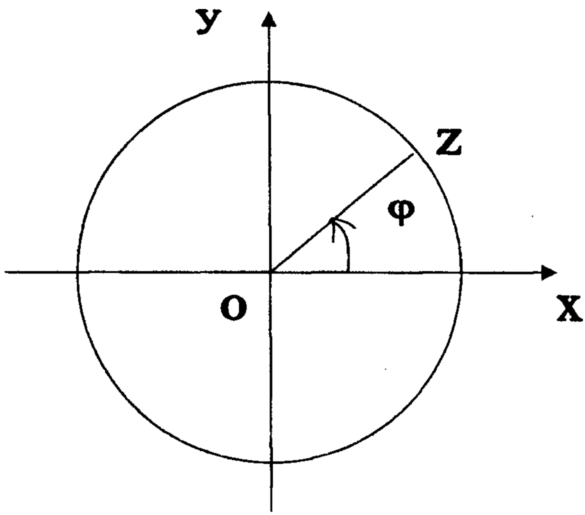
Представим комплексное число в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

где $r = |z|$ - модуль комплексного числа;

$\varphi = arctgz$ - аргумент комплексного числа.

Формула Эйлера **(4)** позволяет представить всякое комплексное число в **показательной форме**

$$z = re^{i\varphi} \qquad \textbf{(5)}$$



Рассмотрим изменение аргумента φ.

При $\varphi = 0$ получим точку z = r, при $\varphi = \pi/2$ - точку $z = ri$, при $\varphi = \pi$ - точку $z = -r$ и т.д. Таким образом, при увеличении аргумента φ точка движется по окружности против часовой стрелки и при $\varphi = 2\pi$ снова возвращается в исходное положение:

$$re^{2i\pi} = r\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = r\ .$$

Пример. Представить в тригонометрической и показательной формах числа:

а) $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$; **б)** $z_2 = 3i$; **в)** $z_3 = 4$.

Изобразить эти числа.

а) Определим модуль и аргумент для числа $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$.

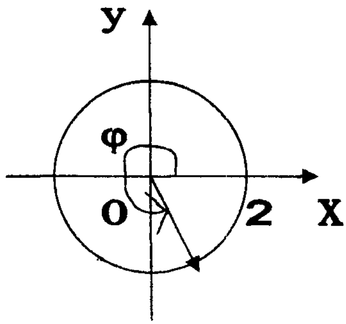
Имеем x = 1, $y = -\sqrt{3}$. Тогда

$$r = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$tg\varphi = -\sqrt{3}/1$. Такому значению тангенса соответствует значение аргумента $\varphi = 5\pi/3$.

Поэтому

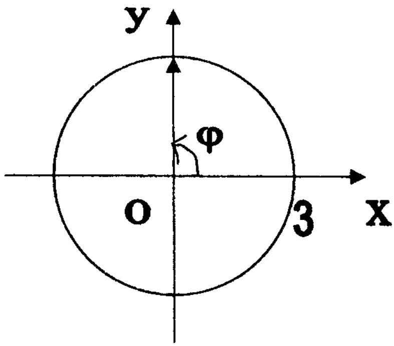
$$r_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\cdot e^{\frac{5\pi}{3}i}\ .$$



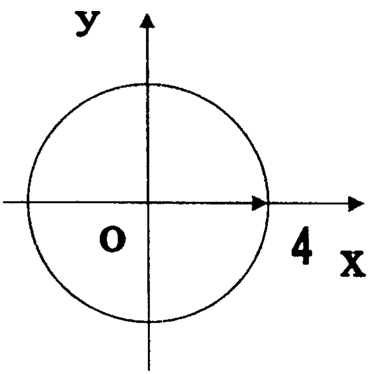
б) Для комплексного числа $z_2 = 3i$ имеет x = 0,

y = 3. Отсюда r = 3; $\cos\varphi = \frac{x}{r} = 0$; $\sin\varphi = \frac{y}{r} = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{т.е. } z_2 = 3i = 3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}.$$



в) Для $z_3 = 4$ имеем $x = 4$, $y = 0$. Откуда $r = 4$; $tg\varphi = 0$, $\varphi = 0$. Таким образом, $z_3 = 4 = 4\cdot(\cos 0 + i\cdot\sin 0) = 4\cdot e^{0i}$



Пример. Комплексное число $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{1-i}$ записать в алгебраической и тригонометрической, показательной формах. Изобразить число.

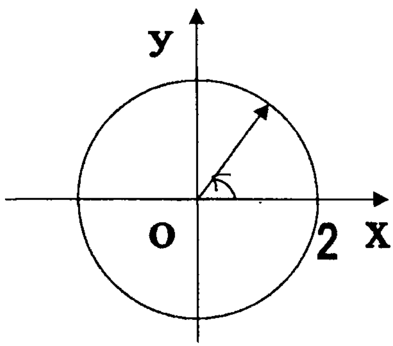
Умножая числитель и знаменатель данной дроби на число, сопряженное знаменателю, получаем:

$$\frac{2\sqrt{2}}{1-i} = \frac{2\sqrt{2}(1-i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{2\sqrt{2}(1+i)}{1-i^2} = \frac{2\sqrt{2}+i\cdot 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$$

алгебраическую форму данного числа z.

Применяя формулы, определяем модуль комплексного числа $r = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$ и главное значение аргумента $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, т.к. $tg\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

Следовательно, тригонометрическая форма данного числа имеет вид $z = 2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$, показательная форма $z = 2\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$.



Задача 2

Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число. Изобразить его.

1. 1
2. 3
3. -2
4. $1+i\sqrt{3}$
5. $-1-i\sqrt{3}$
6. $1+i$
7. $-i$
8. $i6$
9. $-i3$
10. $1-i$
11. $3+i3$
12. $\sqrt{3}-i$
13. $-\sqrt{3}+i$
14. $-1-i$
15. $2+i2\sqrt{3}$
16. -1
17. -3
18. 2
19. $1-i\sqrt{3}$
20. $\sqrt{3}+i$
21. $-1+i$
22. i
23. $2\sqrt{3}-2i$
24. $2+5i$
25. $-12+5i$
26. $4+4i$
27. $1+3i$
28. $-\sqrt{3}-i$
29. $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
30. $2-i$

3. Основные действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z_1 + z_2 = \left(x_1 + i \cdot y_1\right) + \left(x_2 + i \cdot y_2\right) = \left(x_1 + x_2\right) + i \cdot \left(y_1 + y_2\right), \quad \textbf{(6)}$$

т.е. комплексным числом, действительная и мнимые части которого равны сумме соответствующих частей слагаемых.

Вычитание

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется такое комплексное число, которое, будучи сложено с z_2, дает в сумме комплексное число z_1:

$$z_1 - z_2 = \left(x_1 + iy_1\right) - \left(x_2 + iy_2\right) = \left(x_1 - x_2\right) + i\left(y_1 - y_2\right) \qquad \textbf{(7)}$$

Умножение

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется такое комплексное число, которое получается, если перемножим числа как двучлены по правилам алгебры, учитывая, что $i^2 = -1$; $i^3 = \left(-1\right)i = -i$; $i^4 = \left(-i\right) \cdot i = -i^2 = 1$; $i^5 = i$ и т.д., и вообще при любом целом $i^{4k} = +1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$, т.е.

$$z_1 z_2 = \left(x_1 + i \cdot y_1\right) \cdot \left(x_2 + i \cdot y_2\right) = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + \left(y_1 x_2 + x_1 y_2\right) i \quad \textbf{(8)}$$

Деление

Для нахождения частного двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ следует умножить делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{\left(x_1 + iy_1\right) \cdot \left(x_2 - iy_2\right)}{\left(x_2 + iy_2\right) \cdot \left(x_2 - iy_2\right)} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i \qquad \textbf{(9)}$$

Пример. Даны два комплексных числа

$z_1 = 5 + i$ и $z_2 = 2 + 3i$.

Требуется найти их сумму, разность, произведение и частное.

В соответствии с формулами **(6)**, **(7)**, **(8)**, **(9)** получаем:

$$z_1 + z_2 = (5 + i) + (2 + 3i) = (5 + 2) + i(1 + 3) = 7 + i4$$

$$z_1 - z_2 = (5 + i) - (2 + 3i) = (5 - 2) + i(1 - 3) = 3 - 2i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (5 + i) \cdot (2 + 3i) = 10 + 2i + 15i + 3i^2 = 7 - 17i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)} = \frac{10+2i-15i-3i^2}{4-9i^2} = \frac{13-13i}{13} = 1-i$$

Задача 3

Для данных чисел z_1 и z_2 найти:

1. $z_1 + z_2$ **2.** $z_1 - z_2$ **3.** $z_1 \cdot z_2$ **4.** $\frac{z_1}{z_2}$

№	z1	z2	№	z1	z2
1	$3+2i$	$1+i$	16	$1-2i$	$-2-i$
2	$1+i$	$1-i$	17	$5-3i$	$1-2i$
3	$1-2i$	$4+i$	18	$2-3i$	$-2+i$
4	$3+i$	$1-2i$	19	$5+3i$	$2+i$
5	$2-i$	$1+3i$	20	i	$3-i$
6	$3-i$	$1+2i$	21	$1+5i$	$3-i$
7	$2+i$	$4+3i$	22	$-i$	$3+i$
8	$1-i$	$2-i$	23	$1-5i$	$2+3i$
9	$4-i$	$3+i$	24	$1-i$	$-3+i$
10	$2+i$	$-1-i$	25	$2-5i$	$1+i$
11	$4+i$	$1-3i$	26	$1+i$	$-3-i$
12	$1+i$	$2-i$	27	$2+5i$	$3-2i$
13	$5-2i$	$2+i$	28	$2i$	$-1-2i$
14	$1+2i$	$-1+i$	29	$5-4i$	$1-i$
15	$5+2i$	$1+3i$	30	$1+2i$	$4-i$

4. Возведение в степень

Если $z = x + iy$, то по формуле бинома Ньютона имеем

$$z^n = (x + iy)^n = x^n + c_n^1 x^{n-1} \cdot iy + \ldots + (iy)^n, \qquad \mathbf{(10)}$$

где: n – целое положительное число.

В полученном выражении заменяют степени i их значениями.

Пример. Возвести в степень данные комплексные числа: **а)** $(3+4i)^2$; **б)** $(1+2i)^3$.

Применяя **(10)** при n=2 и n=3, получаем:

а) $(3+4i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 12i + (4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = -7 + 24i$.

б) $(1+2i)^3 = 1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$.

Возвести в степень комплексное число можно иным способом, используя тригонометрическую форму записи числа.

Если n – целое положительное число, то

$$z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad \mathbf{(11)}$$

то есть при возведении комплексного числа в степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени. Эта формула называется **формулой Муавра.**

Пример. Возвести число $z = 1 - i$ в четвертую степень.

Представим данное число в тригонометрической форме: $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\quad tg\varphi = \dfrac{-1}{1} = -1$; $\quad \varphi = \dfrac{7\pi}{4}$

(т.к. $\sin\varphi = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$). Поэтому

$z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$. По формуле Муавра **(11)**

получим

$$z^4 = (1-i)^4 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 4\left(\cos 7\pi + i\sin 7\pi\right) = -4.$$

Задача 4

Возвести в степень

1. $(1+i)^{10}$

2. $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$

3. $(-1+i)^5$

4. $\left(1-i\sqrt{3}\right)^6$

5. $\left(2+i\sqrt{12}\right)^5$

6. $(-1-i)^3$

16. $(1-i)^{10}$

17. $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3$

18. $\left(2-i\sqrt{12}\right)^5$

19. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^6$

20. $(4+4i)^3$

21. $\left(-8+8i\sqrt{3}\right)^4$

7. $(3+i3)^4$

8. $\left(2+i2\sqrt{3}\right)^5$

9. $(1+i2)^6$

10. $(2+3i)^3$

11. $\left(3+\sqrt{3}i\right)^3$

12. $(5-3i)^4$

13. $\left(-3-\sqrt{3}i\right)^3$

14. $(-15+8i)^4$

15. $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

22. $(3-4i)^3$

23. $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^3$

24. $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^4$

25. $(2+5i)^3$

26. $\left(8-8\sqrt{3}i\right)^5$

27. $\left(-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i\right)^3$

28. $\left(\frac{1}{4}-i\frac{1}{4}\right)^4$

29. $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

30. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^{12}$

5. Извлечение корня

Если n – целое положительное число, то корень n-ой степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \quad \textbf{(12)}$$

где: k=0,1,2,…,n-1.

Для других значений k аргумента будут отличаться от полученных на число, кратное 2π, и, следовательно, получатся значения корня, совпадающие с рассмотренными.

Из формулы **(13)** видно, что все n значений корня n-ой степени из комплексного числа z расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке O (0;0) и делят эту окружность на n равных частей.

Пример. Найти все значения $z = \sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$.
Запишем число в тригонометрической форме

$$r = \sqrt{64+3\cdot 64} = 16;\ tg\varphi = \frac{-8\sqrt{3}}{-8} = \sqrt{3};\ \varphi = 240^\circ$$

(т.к. $\sin\varphi = \frac{-8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\varphi = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$);

$\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)}$. Используя формулу для отыскания всех значений корня (12) запишем $z_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{240^\circ+2\pi k}{4} + i\sin\frac{240^\circ+2\pi k}{4}\right)$.

Полагая k равным 0,1,2,3 будем иметь

$z_o = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$, т.е. $z_o = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

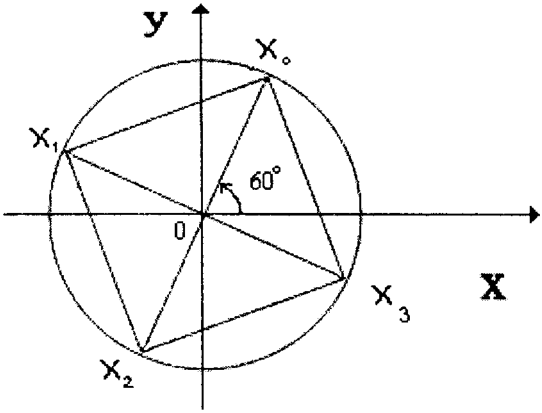
$z_1 = 2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$, т.е. $z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$

$z_2 = 2(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$, т.е.

$z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$

$z_3 = 2(\cos 330° + i\sin 330°)$, т.е. $z_3 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$.

Найденные значения изображаются вершинами правильного
четырехугольника, вписанного в окружность радиуса R=2 с центром в начале координат:



Задача 5

Найти все значения корня

1. $\sqrt[3]{-1}$
2. $\sqrt[4]{-1}$
3. $\sqrt{1+i}$
4. $\sqrt[3]{1}$
5. $\sqrt[6]{1}$
6. $\sqrt{-3-i\sqrt{3}}$

16. $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$
17. $\sqrt[5]{-32i}$
18. $\sqrt[4]{81}$
19. $\sqrt{-11+60i}$
20. $\sqrt[3]{-1+i}$
21. $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$

7. $\sqrt[3]{i}$

8. $\sqrt{i}$

9. $\sqrt[3]{-1+i}$

10. $\sqrt[3]{8}$

11. $\sqrt[4]{-4}$

12. $\sqrt[6]{-64}$

13. $\sqrt[8]{1+i}$

14. $\sqrt[3]{-4+\sqrt{48}i}$

15. $\sqrt[4]{1}$

22. $\sqrt{-8i}$

23. $\sqrt{3-4i}$

24. $\sqrt[4]{1-i}$

25. $\sqrt[3]{8+i}$

26. $\sqrt[4]{4}$

27. $\sqrt[6]{64}$

28. $\sqrt{-15+8i}$

29. $\sqrt{-8-6i}$

30. $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$

Формулу извлечения корня **(12)** можно использовать при решении двучленного уравнения.

Пример. Решить уравнение $x^3-\frac{2\sqrt{2}}{1-i}=0$.

Так как $\frac{2\sqrt{2}}{1-i}=\frac{2\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2\sqrt{2}(1+i)}{1-i^2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, то

$r=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$; $tg\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, при подстановке в уравнение, получим:

$x^3=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, т.е. $x=\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$. Полагая в этой формуле k=0, k=1, k=2, находим:

$$x_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \approx 1,22 + i\cdot 0,37$$

$$x_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right) \approx$$

$$\approx -0,37 - i\cdot 1,22$$

Св. план 2011г., поз. 72

Корниенко Нина Амосовна
Субоч Наталья Николаевна

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

СБОРНИК ЗАДАЧ

Подписано в печать	**Формат 60x84/16**
Усл. – печ.л.	**Тираж 100 экз.**
	Заказ №

150048, Ярославль, Московский пр-т, д. 151
Типография Ярославского ж.д. техникума –
филиала МИИТ